Logik I
Institutionen för matematik och statistik
Våren 2013
Övning 13

Sista inlämningsdag för uppgifterna: ons 24.4.2013 kl.18.00

1. Ge en naturlig deduktion av satsen
$$\forall x \exists y (R_0(F_0^1(x), x) \vee R_1(y, x))$$
från satsen
$$\forall x \forall y (R_0(y, x) \vee R_1(y, x)).$$

2. Visa med hjälp av ett lämpligt semantiskt träd att satsen $\forall x \exists y (R_0(F_0^1(x), x) \rightarrow R_0(y, x))$ är valid.

3. Visa med hjälp av ett lämpligt semantiskt träd att satsen
$$\forall y \forall z (\exists x (R_0(y) \wedge R_1^3(x, y, z)) \rightarrow (R_0(y) \wedge \exists x R_1^3(x, y, z)))$$
är valid.

4. Betrakta satsen:
$$(R_0^3(c, d, e) \vee \forall x P_0(x)) \rightarrow \forall x (R_0^3(x, d, e) \vee P_0(x)).$$
Är satsen valid, kontingent eller kontradiktorisk? Om den är valid eller kontradiktorisk bevisa detta med en lämplig deduktion eller ett semantiskt bevis. Om satsen är kontingent visa detta med modeller som du konstruerat med semantiska trädmetoden.

5. Visa med hjälp av ett semantiskt träd att satsen
$$\exists x (P_0(c) \vee P_0(F_0^1(x))) \rightarrow (P_0(c) \vee \exists y P_0(y))$$
är valid.

6. Betrakta satsen:
$$(R_0(c, d) \vee \forall x P_0(x)) \rightarrow \forall x (R_0(c, d) \vee P_0(F_0^1(x))).$$
Är satsen valid, kontingent eller kontradiktorisk? Om den är valid eller kontradiktorisk bevisa detta med en lämplig deduktion eller ett semantiskt bevis. Om satsen är kontingent visa detta med modeller som du konstruerat med semantiska trädmetoden.

7. Betrakta satsen:
$$\forall x P_0(F_0^1(x), x) \vee \exists x \neg P_0(x, F_0^1(x)).$$
Är satsen valid, kontingent eller kontradiktorisk? Om den är valid eller kontradiktorisk bevisa detta med en lämplig deduktion eller ett semantiskt bevis. Om satsen är kontingent visa detta med modeller som du konstruerat med semantiska trädmetoden.

8. I följande "härledning" av satsen $\forall y \exists z \forall x R_0^3(z, y, x)$ från satsen $\forall y \forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)$ finns ett fel:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y \forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)}{\forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)}\ \forall\, E}{\exists z \forall x R_0^3(z, y, x)}\ \exists\, I}{\forall y \exists z \forall x R_0^3(z, y, x)}\ \forall\, I$$

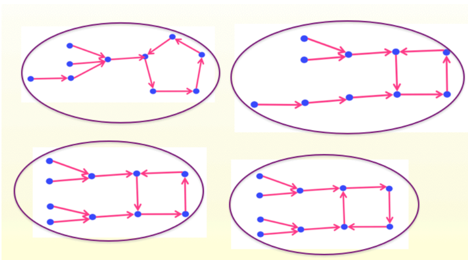
Vilket är felet?

9. Konstruera med hjälp av ett semantiskt träd en modell för satsen
$$\exists x \forall y \exists z R_0^3(x, y, z) \land \neg \forall x R_0^3(x, x, x).$$

10. Låt $L = \{F_0^1\}$. Visa för alla L-termer t där endast variabeln x_1 förekommer:
$$\forall x_1 \forall y_1 (x_1 = y_1 \to t = t'),$$
där t' är den term man får då x_1 ersätts med variabeln y_1 i t. Använd identitetsaxiomen och naturlig deduktion eller alternativt ett semantiskt bevis.

11. Bevisa att om graferna $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ är isomorfa och vidare $\mathcal{M}'$ och grafen $\mathcal{M}''$ är isomorfa så är $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}''$ isomorfa.

12. Vilka av följande modeller med en unär (enställig) funktion är isomorfa med varandra?



13. Låt $\mathcal{M}$ vara en modell och s en $\mathcal{M}$-tolkning. Låt f vara en isomorfism $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$. Visa att det finns exakt en $\mathcal{M}'$-tolkning s' så att s och s' är konjugater med avseende på f, dvs. $s'(x) = f(s(x))$ för varje variabel x.

14. Visa att följande ordnade mängder alla är sinsemellan icke-isomorfa:
    (1) Heltalens ordning.
    (2) De naturliga talens ordning.
    (3) De rationell talens ordning.
    (4) De reella talens ordning. (Dethär fallet är lite annorlunda. Känner du till skillnaden mellan uppräkneliga och överuppräkneliga mängder?)

15. Låt $L = \{R_0\}$. Visa att isomorfa L-modeller satisfierar samma L-satser. (Tips: Visa med induktion över formeln A att om $f : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$ och s och s' är konjugater med avseende på f så gäller $\mathcal{M} \models_s A$ om och endast om $\mathcal{M}' \models_{s'} A$.)