Logik I
Institutionen för matematik och statistik
Våren 2013
Övning 12

Sista inlämningsdag för uppgifterna: ons 17.4.2013 kl.18.00
Sista inlämningsdag för korrigeringar: **ons 24.4.2013 kl.18.00**
(bara en korrigeringsomgång)

1. Härled
$$\forall x(P(x) \to \exists y(x = y \wedge P(y))).$$

2. Härled
$$\forall x(\exists z R_0(x, z) \to \forall y(x = y \to \exists z R_0(y, z))).$$

3. Låt L vara lexikonet $\{R_0\}$ och låt A vara en L-formel. Ge en härledning av
$$(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge A) \to A(y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n)$$
då y_i är fri för x_i i A för alla $i = 1, \ldots, n$. Börja med fallet där A är en atomär formel. Använd sedan induktion.

4. Härled
$$\exists x\exists y\forall z(z = x \vee z = y) \to \forall x\forall y\forall z(x = y \vee y = z \vee x = z).$$

5. Härled från axiomen för linjär ordning
$$\forall x\forall y\forall z(x < y \to (z < y \vee x < z)).$$

6. Härled från axiomen för linjär ordning
$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y(y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n) \to \exists x\forall y(x < y \vee x = y)$$
då $n = 2$.

7. Härled från axiomen för linjär ordning
$$\forall x\forall x'((\forall y(y < x \vee y = x) \wedge \forall y(y < x' \vee y = x')) \to x = x').$$

8. Konstruera ett semantiskt träd för formeln
$$\exists x(P_0(x) \wedge P_1(x)) \wedge \neg\exists y P_0(y) \wedge \neg\exists x P_1(x).$$

9. Konstruera ett semantiskt träd för formeln
$$\exists x(A \wedge \neg B) \wedge \forall x(A \to B).$$

10.* Ge ett semantiskt bevis för formeln
$$\exists x\forall y(R_0(x, y) \vee P_0(x)) \to \forall y\exists x(P_0(x) \vee R_0(x, y)).$$

11. Konstruera ett semantiskt träd för formeln
$$\forall x(A \vee B) \wedge \exists x(\neg A \wedge \neg B).$$

12. Ge ett semantiskt bevis för formeln
$$\exists x\forall y\neg R_0(x, y) \to \exists x\neg\exists y R_0(x, y).$$

13. Använd metoden med semantiskt träd för att konstruera en modell för satsen
$$\forall x \exists y R_0(x, y) \wedge \neg \forall x \exists y R_0(y, x).$$
Observera att det finns andra metoder att konstruera modeller för givna satser, t.ex. helt enkelt genom att gissa och pröva (men här bör trädmetoden användas).

14. Använd metoden med semantiskt träd för att finna en modell för satsen
$$\forall x \exists y \forall z (R_0(x, y) \wedge R_0(y, z) \wedge \neg \forall x \forall y R_0(x, y)).$$

15. Använd metoden med semantiskt träd för att finna en modell för satsen
$$\exists x \forall y R_0(x, y) \wedge \neg \forall x R_0(x, x).$$