Logik I
Institutionen för matematik och statistik
Våren 2013
Övning 10

Sista inlämningsdag för uppgifterna: ons 27.3.2013 kl.18.00
Sista inlämningsdag för korrigeringar: ons 17.4.2013 kl.18.00

1.* Vilka av följande termer är fria för variabeln y i formeln $\exists x R_0(y,x) \wedge P_1(y)$?
(1) x
(2) c
(3) y
(4) z

2. Vilka av följande variabler kan den bundna variabeln x omdöpas till i formeln $\exists x R_0(x,z) \wedge \exists y R_1(z,y)$:
(1) z
(2) y
(3) x

3. Bevisa följande specialfall av substitutionslemmat: Låt A vara formeln $\forall z(R_0(y,z) \to P_0(z))$. Låt termen t vara variabeln x. Då är följande villkor ekvivalenta för alla modeller $\mathcal{M}$ och tolkningar s:
(1) $\mathcal{M} \models_s A(t/y)$
(2) $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$ där $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

4. Bevisa substitutionslemmat: Låt A vara en godtycklig formel och t en godtycklig term. Då är följande villkor ekvivalenta för alla $\mathcal{M}$ och s:
(1) $\mathcal{M} \models_s A(t/y)$
(2) $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$ där $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

5. Ge en naturlig deduktion av satsen “Om alla är roade och trötta, så är alla roade och är alla trötta.”

6. Härled satsen $\forall x R_0(x,x)$ från satsen $\forall x \forall y R_0(x,y)$.

7. Härled satsen $\neg \forall x P_0(x)$ från satsen $\forall x \neg P_0(x)$.

8. Är följande härledning korrekt:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x R_0(x,y)}{R_0(z,y)}\ \forall E}{\forall y R_0(z,y)}\ \forall I$$

9. Är följande härledning korrekt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P_0(x)}{P_0(x)}\ \forall E \quad \dfrac{\forall x P_1(x)}{P_1(y)}\ \forall E}{P_0(x) \wedge P_1(y)}\ \wedge I}{\forall x(P_0(x) \wedge P_1(y))}\ \forall I}{\forall y \forall x(P_0(x) \wedge P_1(y))}\ \forall I$$

10. Ge en naturlig deduktion av satsen: “Om någon är en lycklig miljonär så är någon lycklig.”

11.* Ge en naturlig deduktion av satsen
$$\neg(\forall x P_0(x) \wedge \exists x \neg P_0(x)).$$

12. Ge en naturlig deduktion av satsen $\forall x P_1(x)$ från satserna $\forall x P_0(x)$ och $\forall x(\neg P_1(x) \to \neg P_0(x))$.

13. Ge en naturlig deduktion av satsen
$$\forall x \exists y R_0(x,y) \wedge \forall x \exists y R_1(x,y)$$
från satsen
$$\forall x \exists y (R_0(x,y) \wedge R_1(x,y)).$$

14. Ge en naturlig deduktion av satsen
$$\forall x \exists y (R_0(x,y) \wedge R_1(y,x)) \to \forall u \exists v (R_0(u,v) \vee R_1(v,u)).$$

15. Bevisa med naturlig deduktion: “Det finns en person så att om personen är full så är alla fulla.” Tips: Det gäller att härleda satsen $\exists x(P_0(x) \to \forall x P_0(x))$. Resonera (till exempel) på följande sätt: Om det finns något x så att $\neg P_0(x)$ så gäller för detta x att $P_0(x) \to \forall x P_0(x)$. Om det inte finns ett sådant x att $\neg P_0(x)$ så får man enkelt $\forall x P_0(x)$ och igen $P_0(x) \to \forall x P_0(x)$.