Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2013
Kertaustehtäviä 2. välikokeeseen

Näitä tehtäviä ei palauteta. Pajassa on koeviikolla ohjaajia maanantaina klo 12-16 ja torstaina klo 12-17.

1. Olkoon $L = \{E\}$ verkkojen aakkosto. Ilmaise seuraavat ominaisuudeet predikaattilogiikan kaavoilla.
   (1) On olemassa piste, joka on kaikkien muiden pisteiden naapuri.
   (2) Jokaisella pisteellä on täsmälleen kaksi naapuria.

2. Anna malli ja tulkintafunktio, jotka toteuttavat kaavan $R_0(x, y) \wedge \exists x R_0(x, F_0^1(x))$, mutta eivät kaavaa $R_0(x, F_0^1(x))$.

3. Olkoon $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, R_0^{\mathcal{M}})$, missä $R_0^{\mathcal{M}} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z}, a - b \in \mathbb{P}\}$ ja $\mathbb{P}$ on alkulukujen joukko. Osoita Tarskin totuusmääritelmää käyttäen, että $\mathcal{M} \models \neg\exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$.

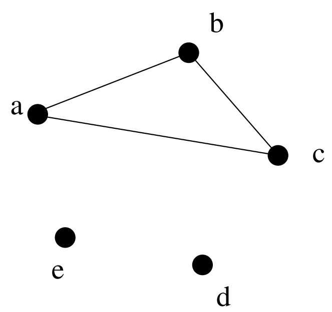
4. Osoita, että kaavat $\forall x A$ ja $\neg\exists x \neg A$ ovat loogisesti ekvivalentteja.

5. Osoita, että kaava $\forall x\ F_0^1(x) = x$ ei ole kaavan $\forall x\ F_0^1(F_0^1(x)) = x$ looginen seuraus.

6. Osoita, että lause $\forall x \exists y R_0(x, y) \vee \exists x \neg R_0(x, x)$ on validi.

7. Olkoon $A = R_0(x, y) \wedge \exists x R_0(x, y) \wedge \forall y P_0(y)$. Ovatko seuraavat kaavat määritelty? Jos kaava on määritelty, niin mikä kaava tarkalleen ottaen on? Jos kaavaa ei ole määritelty, niin miksi ei?
   (1) $A(c/x)$
   (2) $A(x/y)$
   (3) $A(y/x)$
   (4) $A(c/y)$

8. Olkoon $\mathcal{G}$ seuraava verkko:



   Osoita, että joukot $\emptyset$, $\{a, b, c\}$ ja $\{d, e\}$ ovat määriteltäviä.

9. Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $f(x) = x^2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että funktion f kuvaaja on määriteltävä relaatio mallissa $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

10. Päättele kaava $\neg\exists x P_0(x) \to \neg P_0(c)$.

11. Päättele oletuksesta $\forall x_0 \forall x_1 (R_0(x_0, x_1) \to (P_0(x_0) \wedge \neg P_0(x_1)))$ kaavat
   (1) $\forall x_0 \neg R_0(x_0, x_0)$
   (2) $\neg\exists x_3 P_0(x_3) \to \neg\exists x_0 R_0(x_0, x_1)$

12. Osoita, että seuraavaa lausetta ei voi päätellä:

$$\exists y \forall x (R_0(x,y) \vee R_0(y,x)) \to (\exists y \forall x R_0(x,y) \vee \exists y \forall x R_0(y,x)).$$

13. Voidaanko lause $\exists x \forall y R_0(x,y) \vee \forall x \exists y \neg R_0(y,x)$ päätellä? Perustele vastauksesi.

14. Etsi semanttisen puun avulla malli lauseelle $\forall x \exists y R_0(F_0^1(y), x) \wedge \neg \exists x R_0(F_0^1(x), x)$.

15. Etsi semanttisen puun avulla malli lauseelle $\forall x (P_0(x) \wedge \exists y R_0(x,y))$.

16. Anna semanttinen todistus lauseelle $\forall x R_0(F_0^1(x), x) \to \forall x \exists y R_0(y,x)$.

17. Olkoon $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{Z}, (F_0^1)^{\mathcal{M}_1})$ ja $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{Z}, (F_0^1)^{\mathcal{M}_2})$, missä $(F_0^1)^{\mathcal{M}_1}(n) = n+1$ ja $(F_0^1)^{\mathcal{M}_2}(n) = n-1$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Osoita, että $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$ (ts. että $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ ovat isomorfiset).