

Logiikka I

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kevät 2013

Tehtäviä 9

Harjoitusten viimeinen palautuspäivä: 20.3.2013 klo 18:00

Korjausten viimeinen palautuspäivä: 10.4.2013 klo 18:00

Tehtävä 1 *Kuvaile omin sanoin, miltä lauseen $\forall x\forall y(P_0(x) \rightarrow P_1(y))$ mallit näyttävät.*

Tehtävä 2 *Osoita, että kaavat $\exists x\exists yA$ ja $\exists y\exists xA$ ovat (loogisesti) ekvivalentteja.*

Tehtävä 3 *Osoita, että kaavat $\forall x\forall yA$ ja $\forall y\forall xA$ ovat (loogisesti) ekvivalentteja.*

Tehtävä 4 *Osoita, että kaavat $\neg\exists xA$ ja $\forall x\neg A$ ovat (loogisesti) ekvivalentteja.*

Tehtävä 5 *Osoita, että kaavat $\neg\forall xA$ ja $\exists x\neg A$ ovat (loogisesti) ekvivalentteja.*

Tehtävä 6* *Osoita, että kaava $\forall y\exists xA$ on kaavan $\exists x\forall yA$ (looginen) seuraus.*

Tehtävä 7 *Osoita, että kaavat $\exists x\forall yR(x,y)$ ja $\forall y\exists xR(x,y)$ eivät ole (loogisesti) ekvivalentteja.*

Tehtävä 8* *Osoita, että kaavat $\forall x(P_0(x) \vee P_1(x))$ ja $\forall xP_0(x) \vee \forall xP_1(x)$ eivät ole (loogisesti) ekvivalentteja.*

Tehtävä 9 *Mitkä muuttujien esiintymät seuraavissa kaavoissa ovat vapaita ja mitkä sidottuja?*

1. $\forall x(P_0(x) \rightarrow P_1(y))$
2. $\forall x(xEy \vee yEx)$
3. $\forall x(\forall y(xEy) \vee \forall z(yEz))$

Tehtävä 10 *Mitkä seuraavista kaavoista ovat lauseita?*

1. $P_0(x)$
2. $\forall xP_0(x)$
3. $\forall xP_0(y)$
4. $\forall y(\exists x(x < y) \vee \exists x(y < x))$
5. $\forall y(\exists x(x < y) \vee y < x)$

Tehtävä 11 *Osoita kaavan $P_0(x) \wedge \neg P_1(x)$ määrittelemä joukko kuvan Figure 1 unaarisessa struktuurissa.*

Tehtävä 12 *Osoita kaavan $P_0(x) \leftrightarrow P_1(x)$ määrittelemä joukko kuvan Figure 1 unaarisessa struktuurissa.*

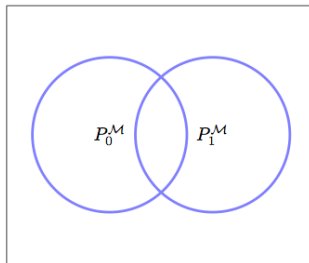


Figure 1: Kuva

Tehtävä 13 Piirrä binäärinen relaatio, jonka kaava

$$x > d \vee y < c$$

määrittelee mallissa $M = (\mathbb{R}, <, 0, 1)$, $c^M = 0, d^M = 1$.

Tehtävä 14 Piirrä binäärinen relaatio, jonka kaava

$$x < d \rightarrow x = y$$

määrittelee mallissa $M = (\mathbb{R}, <, 0, 1)$, $c^M = 0, d^M = 1$.

Tehtävä 15 Olkoon A kaava ja \mathcal{M} malli. Osoita, että jos s ja s' ovat tulkintafunktioita jotka yhtyvät (siis saavat saman arvon) niillä muuttujilla jotka esiintyvät vapaina kaavassa A , niin s toteuttaa kaavan A mallissa \mathcal{M} jos ja vain jos s' toteuttaa kaavan A mallissa \mathcal{M} . (Ohje: Käytä induktiota kaavan A suhteen.)