

Logiikka I

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kevät 2013

Tehtäviä 12

Harjoitusten viimeinen palautuspäivä: 17.4.2013 klo 18:00

Korjausten toinen ja viimeinen palautuspäivä: 24.4.2013 klo 18:00

Tehtävä 1 Päättele

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(x = y \wedge P(y))).$$

Tehtävä 2 Päättele

$$\forall x(\exists zR_0(x, z) \rightarrow \forall y(x = y \rightarrow \exists zR_0(y, z))).$$

Tehtävä 3 Olkoon L aakkosto $\{R_0\}$ ja A aakkoston L kaava. Anna päättely

$$(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \wedge A) \rightarrow A(y_1/x_1, \dots, y_n/x_n),$$

kun y_i on vapaa x_i :lle A :ssa kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tee päättely ensin tapauksessa, että A on atomikaava. Etene sitten induktiolla.

Tehtävä 4 Päättele

$$\exists x \exists y \forall z(z = x \vee z = y) \rightarrow \forall x \forall y \forall z(x = y \vee y = z \vee x = z).$$

Tehtävä 5 Päättele järjestyksen aksioomista

$$\forall x \forall y \forall z(x < y \rightarrow (z < y \vee x < z)).$$

Tehtävä 6 Päättele järjestyksen aksioomista

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \forall y(y = x_1 \vee \dots \vee y = x_n) \rightarrow \exists x \forall y(x < y \vee x = y),$$

kun $n = 2$.

Tehtävä 7 Päättele järjestyksen aksioomista

$$\forall x \forall x'((\forall y(y < x \vee y = x) \wedge \forall y(y < x' \vee y = x')) \rightarrow x = x').$$

Tehtävä 8 Rakenna semanttinen puu kaavalle

$$\exists x(P_0(x) \wedge P_1(x)) \wedge \neg \exists y P_0(y) \wedge \neg \exists x P_1(x)$$

Tehtävä 9 Rakenna semanttinen puu kaavalle

$$\exists x(A \wedge \neg B) \wedge \forall x(A \rightarrow B)$$

Tehtävä 10* Anna semanttinen todistus kaavalle

$$\exists x \forall y(R_0(x, y) \vee P_0(x)) \rightarrow \forall y \exists x(P_0(x) \vee R_0(x, y))$$

Tehtävä 11 *Rakenna semanttinen puu kaavalle*

$$\forall x(A \vee B) \wedge \exists x(\neg A \wedge \neg B)$$

Tehtävä 12 *Anna semanttinen todistus kaavalle*

$$\exists x \forall y \neg R_0(x, y) \rightarrow \exists x \neg \exists y R_0(x, y)$$

Tehtävä 13 *Etsi semanttisen puun menetelmällä malli lauseelle*

$$\forall x \exists y R_0(x, y) \wedge \neg \forall x \exists y R_0(y, x).$$

Huomaa, että olisi kyllä muitakin menetelmiä mallien löytämiseksi, kuten vaikkapa puhdas kokeilu.

Tehtävä 14 *Etsi semanttisen puun menetelmällä malli lauseelle*

$$\forall x \exists y \forall z (R_0(x, y) \wedge R_0(y, z) \wedge \neg \forall x \forall y R_0(x, y)).$$

Huomaa, että olisi kyllä muitakin menetelmiä mallien löytämiseksi, kuten vaikkapa puhdas kokeilu.

Tehtävä 15 *Etsi semanttisen puun menetelmällä malli lauseelle*

$$\exists x \forall y R_0(x, y) \wedge \neg \forall x R_0(x, x).$$

Huomaa, että olisi kyllä muitakin menetelmiä mallien löytämiseksi, kuten vaikkapa puhdas kokeilu.