Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2013
Tehtäviä 10
Harjoitusten viimeinen palautuspäivä: 27.3.2013 klo 18:00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: 17.4.2013 klo 18:00

Tehtävä 1* *Mitkä annetuista termeistä ovat vapaita muuttujalle y kaavassa $\exists x R_0(y, x) \wedge P_1(y)$?*

1. x
2. c
3. y
4. z

Tehtävä 2 *Miksi annetuista muuttujista voidaan sidottu muuttuja x vaihtaa kaavassa $\exists x R_0(x, z) \wedge \exists y R_1(z, y)$:*

1. z
2. y
3. x

Tehtävä 3 *Todista seuraava erikoistapaus sijoituslemmasta (engl. Substitution Lemma): Olkoon A kaava $\forall z(R_0(y, z) \to P_0(z))$. Valitaan termiksi t muuttuja x. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja kaikilla $\mathcal{M}$ ja s:*

1. $\mathcal{M} \models_s A(t/y)$
2. $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$, *missä* $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

Tehtävä 4 *Todista sijoituslemma: Olkoon A mielivaltainen kaava ja t mielivaltainen termi. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja kaikilla $\mathcal{M}$ ja s:*

1. $\mathcal{M} \models_s A(t/y)$
2. $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$, *missä* $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

Tehtävä 5 *Anna luonnollinen päättely lauseelle "Jos jokainen on huvittunut ja väsynyt, niin jokainen on huvittunut ja jokainen on väsynyt."*

Tehtävä 6 *Päättele lause $\forall x R_0(x, x)$ lauseesta $\forall x \forall y R_0(x, y)$.*

Tehtävä 7 *Päättele lause $\neg \forall x P_0(x)$ lauseesta $\forall x \neg P_0(x)$.*

Tehtävä 8 *Onko seuraava päättely korrekti:*

$$\dfrac{\dfrac{\forall x R_0(x,y)}{R_0(z,y)}\ \forall\ \mathbf{E}}{\forall y R_0(z,y)}\ \forall\ \mathbf{T}$$

Tehtävä 9 *Onko seuraava päättely korrekti:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P_0(x)}{P_0(x)}\ \forall\ \mathbf{E} \qquad \dfrac{\forall x P_1(x)}{P_1(y)}\ \forall\ \mathbf{E}}{P_0(x) \wedge P_1(y)}\ \wedge\ \mathbf{T}}{\forall x(P_0(x) \wedge P_1(y))}\ \forall\ \mathbf{T}}{\forall y \forall x(P_0(x) \wedge P_1(y))}\ \forall\ \mathbf{T}$$

Tehtävä 10 *Anna luonnollinen päättely lauseelle: "Jos joku on onnellinen miljonääri, niin joku on onnellinen."*

Tehtävä 11* *Päättele lause*

$$\neg(\forall x P_0(x) \wedge \exists x \neg P_0(x)).$$

Tehtävä 12 *Päättele lause* $\forall x P_1(x)$ *lauseista* $\forall x P_0(x)$ *ja* $\forall x(\neg P_1(x) \to \neg P_0(x))$.

Tehtävä 13 *Päättele lause*

$$\forall x \exists y R_0(x,y) \wedge \forall x \exists y R_1(x,y)$$

lauseesta

$$\forall x \exists y (R_0(x,y) \wedge R_1(x,y)).$$

Tehtävä 14 *Päättele lause*

$$\forall x \exists y (R_0(x,y) \wedge R_1(y,x)) \to \forall u \exists v (R_0(u,v) \vee R_1(v,u)).$$

Tehtävä 15 *Päättele lause: "On olemassa joku siten, että jos hän on juoppo, niin jokainen on juoppo." Vihje: On pääteltävä lause* $\exists x(P_0(x) \to \forall x P_0(x))$. *Ajattele (esimerkiksi) seuraavasti: Jos on jokin* x *jolle* $\neg P_0(x)$, *niin tälle* x *pätee* $P_0(x) \to \forall x P_0(x)$. *Jos taas ei ole sellaista* x *jolle* $\neg P_0(x)$, *niin saadaan helposti* $\forall x P_0(x)$ *ja jälleen* $P_0(x) \to \forall x P_0(x)$.