

Lineaariset mallit, kl 2013, Harjoitus 3, viikko 15

1. Tarkastellaan lineaarista mallia $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$, $\sigma^2 > 0$, $r(\mathbf{X}) = p$). Osoita, että residuaalivektorille $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pätee $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{P})\boldsymbol{\varepsilon}$, jossa $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ (ks. monisteen s. 9). Laske tämän ja liitteen A.1 tulosten avulla $\mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$, $\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$ ja $\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\boldsymbol{\beta}})$.

2. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Osoita, että $\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ja että $\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2\bar{x}_2 - \dots - \hat{\beta}_p\bar{x}_p$, kun mallissa on vakio eli $x_{i1} = 1$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tässä $\bar{x}_j = (x_{1j} + \dots + x_{nj})/n$, jossa x_{ij} on matriisin \mathbf{X} yleinen alkio ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$), $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\beta}_1 \dots \hat{\beta}_p]'$ ja muut merkinnät ovat kuten monisteessa (ks. s. 8-10).

3. Tehtävässä 1.4 on todettu, että $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = \mathbf{y}'(\mathbf{I}_n - \mathbf{J})\mathbf{y}$, jossa $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_n]'$ ja $\mathbf{J} = \mathbf{1}_n(\mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n)^{-1}\mathbf{1}_n'$ eli monisteen s. 10 merkinnöin $\text{SST} = \mathbf{y}'(\mathbf{I}_n - \mathbf{J})\mathbf{y}$. Osoita, että $\text{SSR} = \mathbf{y}'(\mathbf{P} - \mathbf{J})\mathbf{y}$ ja $\text{SSE} = \mathbf{y}'(\mathbf{I}_n - \mathbf{P})\mathbf{y}$, jossa $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ ja kuten monisteen vastaavassa kohdassa on myös tässä matriisin \mathbf{X} ensimmäinen sarake ykkösvektori $\mathbf{1}_n$. Tästä saat vaihtoehdoisen perustelun monisteessa s. 10 esitetylle tulokselle $\text{SST} = \text{SSR} + \text{SSE}$.

4. Tarkastellaan tehtävän 1 mallia erikoistapauksessa $p = 1$, jolloin malliyhtälö on havaintoyksiköittäin ilmaistuna $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, ja \mathbf{X} on vektori $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]'$. (i) Osoita, että PNS-estimaattori parametrille β on

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

(ii) Oletetaan nyt, että selittävän muuttujan x_i paikalla mallissa ja PNS-estimaattorissa $\hat{\beta}$ on satunnainen X_i . Osoita PNS-estimaattorin harhattomuus eli $\mathbf{E}(\hat{\beta}) = \beta$, kun monisteen s. 11 mainittu ehto (a) eli $(X_1, \dots, X_n) \perp\!\!\!\perp (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ pätee. Perustele lisäksi, miksei harhattomuus välttämättä päde ilman tätä riippumattomuutta. (*Vihje:* Kohdassa (ii) kannattaa sijoittaa $Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i$ ja tarkastella erotuksen $\hat{\beta} - \beta$ odotusarvoa. Kaikkien tarvittavien odotusarvojen oletetaan olevan äärellisinä olemassa. Viimeisessä kohdassa ei vaadita tarkkaa matemaattista perustelua.)

5. Tarkastellaan tehtävän 1 mallia yhden selittävän muuttujan lineaarisen regressiomallin tapauksessa, jolloin malliyhtälö on havaintoyksiköittäin ilmaistuna $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$. Merkitään $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2]'$ ja $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$. (i) Muodosta Lauseen 2.1(i) tulosta käyttäen $\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ ja edelleen $\text{Var}(\hat{\beta}_2)$ ja $\text{Var}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{x})$. (ii) Oletetaan, että selittävien muuttujien arvot x_1, \dots, x_n voidaan valita vapaasti väliltä $[c, d]$. Miten ne on valittava, jos $\text{Var}(\hat{\beta}_2)$ halutaan minimoida? Onko tämä valinta muuten järkevä? (*Huom.:* Kohdassa (ii) ei vaadita yksityiskohtaisia matemaattisia todistuksia. Niissä voit myös olettaa, että n on parillinen.)