Lineaariset mallit, kl 2013, Harjoitus 1, viikko 12

1. Symmetristä matriisia $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ sanotaan positiivisesti definiitiksi (merkitään $\mathbf{A} > \mathbf{0}$), jos $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0}$ kaikilla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (ks. monisteen Liite B.11). Osoita, että matriisi $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ on positiivisesti definiitti jos ja vain jos sen ominaisarvot ovat positiivisia. Osoita edelleen, että positiivisesti definiitti matriisi on epäsingulaarinen (eli sillä on käänteismatriisi). (*Vihje*: Voit käyttää symmetrisen matriisin pääakselihajotelmaa; ks. monisteen Liite B.6.)

2. Olkoon $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ positiivisesti definiitti ja $\mathbf{B}$ $(n \times k)$ astetta k oleva matriisi (eli $\mathbf{B}$:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat; ks. monisteen Liite B.9). Osoita, että $\mathbf{B}'\mathbf{A}\mathbf{B}$ $(k \times k)$ on positiivisesti definiitti ja siten epäsingulaarinen.

3. Olkoon neliömatriisi $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ idempotentti eli $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}$ (merkitään $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$; ks. monisteen Liite B.10). Osoita, että $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ on myös idempotentti ja että $\mathbf{A}$:n ominaisarvot ovat nollia ja ykkösiä. (*Vihje*: Ominaisvektorit määrittävä yhtälö; ks. monisteen Liite B.6.)

4. Tarkastellaan aineistosta $y_1, ..., y_n$ laskettua otoskeskiarvoa $\bar{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} y_i$ ja otosvarianssia $s^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$. Osoita, että

$$(n-1)\, s^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 = \mathbf{y}' (\mathbf{I}_n - \mathbf{J})\, \mathbf{y},$$

jossa $\mathbf{y} = [y_1 \ \cdots \ y_n]'$ ja $\mathbf{J} = \mathbf{1}_n (\mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n'$ ($\mathbf{1}_n = [1 \cdots 1]'$, $n \times 1$). Osoita lisäksi, että $\mathbf{J}$ (ja siten $\mathbf{I}_n - \mathbf{J}$) on symmetrinen ja idempotentti (eli ortogonaalinen projektio) osoittamalla yleisesti, että matriisi $\mathbf{P} = \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'$ on symmetrinen ja idempotentti, kun $\mathbf{X}$ on astetta p oleva $n \times p$ matriisi.

5. (Yksisuuntainen varianssianalyysimalli) Olkoon $Y_{11}, ..., Y_{1n_1}, Y_{21}, ..., Y_{2n_2}, ..., Y_{p1}, ..., Y_{pn_p}$ riippumattomia ja $Y_{ji} \sim \mathsf{N}(\mu_j, \sigma^2)$ $(\mu_j \in \mathbb{R},\, \sigma^2 > 0)$. Esitä tilanne lineaarisen mallin erikoistapauksena käyttäen lineaarisen mallin matriisiesitystä. Mikä on matriisin $\mathbf{X}$ aste?