

Inversio-ongelmat, kevät 2013

2. harjoitus 1.2.2013

1. Laske Fourier-kertoimet

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad (1)$$

funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases} \quad (2)$$

2. Olkoon $\{q_1, \dots, q_n\}$ ortonormaali ja $x \in E$. Osoita, että tällöin

$$\left\| \sum_{i=1}^n \langle x, q_i \rangle q_i - x \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i q_i - x \right\| \quad (3)$$

ja että kaavassa ei voi päteä yhtäsuuruutta jos $c_i \neq \langle x, q_i \rangle$ jollakin i .

3. Osoita, että

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

toteuttaa $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

4. Tutustu seuraaviin appletteihin. Kohdissa a,b,c:

<http://www.falstad.com/fourier/index.html>

- a) Tässä appletissa valitse ”triangle-funktio” ja tarkastele sini- ja cosinisarjojen muuttumista naputtelemalla ”phase-shift-nappia”. Minkä ominaisuuden voit havaita tällöin sarjoissa? Miksi sama ei tapahdu ”sawtooth-funktiolla”?
- b) Tarkastele ”square-funktion” avulla fourier-sarjan suppenemistä. Lisää ”number of terms” liukunapulla klikaten termejä vaiheittain fourier-sarjaan. Mitä voit kertoa pisteittäisestä suppenemisestä.
- c) Tarkastele ”square-funktiota” täysillä fourier-kertoimilla. Mitä tapahtuu, kun alat naputella ”high-pass filteriä”. Mieti mihin tällaista suodatusta voisi käyttää?

d) <http://www.malinc.se/math/trigonometry/musicen.php>

Tutustu appletissa oleviin kohtiin ”The frequencies of the notes” ja ”Overtones”. Mieti fourier-sarjan suhdetta vaikkapa johonkin ääneen... vaikkapa laulettuun tai soitettuun yksittäiseen nuottiin!

e) Tutustu erilaisiin suodatustyypppeihin sivulta:

http://music.columbia.edu/cmc/musicandcomputers/chapter4/04_03.php

Kohdasta ”Four Basic Types of Filters” Kokeile asiaa kohtaan liittyvällä appeltilla 4.5. tarkastele vaikkapa valkoista kohinaa ja sen muuttumista eri suodatusten mukana.