1.2. Rajoitetusti heilahtelevista stokastisista prosesseista.

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kiinteä todennäköisyyskenttä ja $\{Z(t) \mid t \in [a,b]\}$ perhe satunnaismuuttujia $(\Omega, \mathcal{F})$:llä. Siis $Z = \{Z(t)\}$ on stokastinen prosessi. Jatkossa Z tulee usein olemaan Markov-hyppyprosessi äärellisellä tila-avaruudella.

Olkoon $\{\mathcal{F}_t\}$ kasvava jono $\mathcal{F}$:n ali-sigma-algebroita. Esimerkiksi

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Z(s);\ s \le t)$$

Tätä kutsutaan prosessin Z generoimaksi historiaksi. Selvästi $\{\mathcal{F}_t\}$ on kasvava.

Olkoon $X = \{X(t)\}$ sopiva stokastinen prosessi t.s. $X(t)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen, $\forall t$. X:ää kutsutaan martingaaliksi (mg), jos

$$(1.12) \qquad \mathbb{E}(|X(t)|) < \infty, \quad \forall t,$$

$$(1.13) \qquad \mathbb{E}(X(u) \mid \mathcal{F}_t) = X(t), \quad \forall\ a \le t < u \le b$$

($\mathbb{E}(X(u) \mid \mathcal{F}_t)$ on sellainen $\mathcal{F}_t$-mitallinen satunnaismuuttuja, että

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X(u) \mid \mathcal{F}_t)\, 1(B)) = \mathbb{E}(X(u)\, 1(B)),$$

$\forall\ B \in \mathcal{F}_t$). Ehdollisella odotusarvolla on paljon samoja ominaisuuksia kuin tavallisella odotusarvolla, esimerkiksi lineaarisuus ja monotonisuus. Jatkossa käyttökelpoisia tuloksia ovat myös

1) $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_u) \mid \mathcal{F}_t)$, $t \le u$,

2) Jos Y_1 on $\mathcal{F}_t$-mitallinen, niin $\mathbb{E}(Y_1 \mid \mathcal{F}_t) = Y_1$ ja

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2 \mid \mathcal{F}_t) = Y_1 \, \mathbb{E}(Y_2 \mid \mathcal{F}_t).$$

Tarkastellaan vielä erikoistapausta, jossa

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Z(s) \mid s \le t)$$

ja $\{Z\}$ on Markov-prosessi tila-avaruutena $E = \{1, \dots, N\}$. Jos $f : E \to \mathbb{R}$ on mitallinen ja $t \le u$, niin

$$\mathbb{E}(f(Z(u)) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(Z(u)) \mid Z(t))$$

$$= \sum_{j \in E} P_{Z(t), j}(t, u) \, f(j)$$

missä

$$P_{ij}(t, u) = \mathbb{P}(Z(u) = j \mid Z(t) = i).$$

Olkoon X rajoitetusti heilahteleva cadlag-prosessi. Toisin sanoen polut

$$t \longmapsto X(t,\omega)$$

ovat rajoitetusti heilahtelevia cadlag-funktioita välillä $[a,b]$ kaikilla ω. Olkoon edelleen H sellainen vasemmalta jatkuva prosessi, että integraali

$$\int_a^t H(s)\, dX(s), \quad t \in [a,b],$$

on määritelty omegoittain kohdan 1.1 mukaisesti.

Lemma 1.2. Olkoon X rajoitetusti heilahteleva cadlag-martingaali ja H vasemmalta jatkuva sopiva rajoitetusti heilahteleva prosessi. Olkoon

$$X = X_1 - X_2,$$

missä X_1 ja X_2 ovat kasvavia sopivia cadlag-prosesseja. Oletetaan, että $\mathbb{E}(|X_k(t)|) < \infty$, $\forall t \in [a,b]$, ja

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b |H(s)|\, d X_k(s)\Big) < \infty, \quad k = 1,2.$$

Silloin prosessi M,

$$M(t) = \int_a^t H(s)\, d X(s), \quad t \in [a,b],$$

on martingaali.

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\mathbb{E}(|M(t)|) < \infty$, $\forall t$. Selvästi

$$M(t) = \int_a^t H(s)\, d\,\Sigma_1(s) - \int_a^t H(s)\, d\,\Sigma_2(s)$$
$$\leq \int_a^t |H(s)|\, d\,\Sigma_1(s) + \int_a^t |H(s)|\, d\,\Sigma_2(s)$$

ja

$$M(t) \geq -\int_a^t |H(s)|\, d\,\Sigma_1(s) - \int_a^t |H(s)|\, d\,\Sigma_2(s).$$

Siis

$$|M(t)| \leq \int_a^b |H(s)|\, d\,\Sigma_1(s) + \int_a^b |H(s)|\, d\,\Sigma_2(s)$$

ja $\mathbb{E}(|M(t)|) < \infty$. Raja-arvon (1.5) nojalla M on sopiva.

Olkoon $a \leq t < u \leq b$. On osoitettava, että

$$(1.13.1) \qquad \mathbb{E}(M(u) \mid \mathcal{F}_t) = M(t).$$

Olkoon ensin $H(s,\omega) \geq 0$, $H(s,\omega) \leq B$, $\forall s, \omega$, missä $B > 0$ on vakio. Olkoon

$$a = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < s_n = u$$

sellainen välin $[a,u]$ jako, että t on eräs jakopiste. Olkoon $t = s_m$. Tällöin

$$(1.14)\quad \mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} H(s_i)\,(\underline{X}(s_{i+1}) - \underline{X}(s_i)) \,\Big|\, \mathcal{F}_t \Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} H(s_i)\,(\underline{X}(s_{i+1}) - \underline{X}(s_i)) \,\Big|\, \mathcal{F}_{s_{n-1}} \Big) \Big| \mathcal{F}_t \Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-2} H(s_i)\,(\underline{X}(s_{i+1}) - \underline{X}(s_i)) \,\Big|\, \mathcal{F}_t \Big]$$

$$+ \mathbb{E}\Big[H(s_{n-1})\, \underbrace{\mathbb{E}\big(\underline{X}(s_n) - \underline{X}(s_{n-1}) \,\big|\, \mathcal{F}_{s_{n-1}} \big)}_{=0} \Big| \mathcal{F}_t \Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{n-2} H(s_i)\,(\underline{X}(s_{i+1}) - \underline{X}(s_i)) \,\Big|\, \mathcal{F}_t \Big)$$

$$= \dots = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{m-1} H(s_i)\,(\underline{X}(s_{i+1}) - \underline{X}(s_i)) \,\Big|\, \mathcal{F}_t \Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} H(s_i)\,(\underline{X}(s_{i+1}) - \underline{X}(s_i)).$$

Nyt

$$\Big| \sum_{i=0}^{n-1} H(s_i)\,(\underline{X}(s_{i+1}) - \underline{X}(s_i)) \Big|$$

$$\leq \Big| \sum_{i=0}^{n-1} H(s_i)(\underline{X}_1(s_{i+1}) - \underline{X}_1(s_i)) \Big| + \Big| \sum_{i=0}^{n-1} H(s_i)(\underline{X}_2(s_{i+1}) - \underline{X}_2(s_i)) \Big|$$

$$\leq B\,|\underline{X}_1(u) - \underline{X}_1(a)| + B\,|\underline{X}_2(u) - \underline{X}_2(a)|.$$

Tämän odotusarvo on äärellinen oletusten nojalla.

Tuloksesta (1.5) ja dominoidun konvergenssin lauseesta ehdolliselle odotusarvolle seuraa (1.13.1).

Olkoon $H(s,\omega) \geq 0$, $\forall s,\omega$. Mielivaltaiselle $B>0$ merkitään

$$H^B(s,\omega) = \min(H(s,\omega), B).$$

Tällöin myös H^B täyttää lemman ehdot, joten alkuosan nojalla

$$\mathbb{E}\left(\int_a^u H^B(s)\,d\,\underline{X}(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right) = \int_a^t H^B(s)\,d\,\underline{X}(s).$$

Kiinteällä $\omega \in \Omega$, $H^B(s,\omega) \uparrow H(s,\omega)$, $\forall s$, kun $B \to \infty$. Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\int_a^u H^B(s)\,d\,\underline{X}_k(s) \uparrow \int_a^u H(s)\,d\,\underline{X}_k(s), \quad \forall \omega,$$

$k=1,2$. Monotonisen konvergenssin lause ehdolliselle odotusarvolle antaa

$$\mathbb{E}\left(\int_a^u H(s)\,d\,\underline{X}(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_a^u H(s)\,d\,\underline{X}_1(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_a^u H(s)\,d\,\underline{X}_2(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \lim_{B\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_a^u H^B(s)\,d\,\underline{X}_1(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right) - \lim_{B\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_a^u H^B(s)\,d\,\underline{X}_2(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \lim_{B\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_a^u H^B(s)\,d\,\underline{X}(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right) = \lim_{B\to\infty} \int_a^t H^B(s)\,d\,\underline{X}(s)$$

$$= \int_a^t H(s)\,d\,\underline{X}(s).$$

Siis (1.13.1) pätee, kun $H \geq 0$.

Olkoon lopuksi H yleinen. Kirjoitetaan $H = H^+ - H^-$, missä

$$H^+(s,\omega) = \max(H(s,\omega), 0)$$

ja

$$H^-(s,\omega) = -\min(H(s,\omega), 0).$$

Selvästi H^+ ja H^- toteuttavat lemman ehdot, joten jo todistetun nojalla

$$\mathbb{E}\left(\int_a^u H(s)\,d\,\mathbb{X}(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_a^u H^+(s)\,d\,\mathbb{X}(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_a^u H^-(s)\,d\,\mathbb{X}(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \int_a^t H^+(s)\,d\,\mathbb{X}(s) - \int_a^t H^-(s)\,d\,\mathbb{X}(s)$$

$$= \int_a^t H(s)\,d\,\mathbb{X}(s). \qquad \square$$

Jos X toteuttaa (1.12):n ja ehdon

(1.15) $$\mathbb{E}(X(u) \mid \mathcal{F}_t) \ge X(t), \quad \forall a \le t < u \le b,$$

kutsutaan X:ää *alimartingaaliksi*. Alimartingaali X voidaan usein esittää muodossa

(1.16) $$X = M + \Lambda, \quad M(0) = 0,$$

missä M on martingaali ja Λ on kasvava ja jatkuva prosessi. Tällaisia esityksiä on korkeintaan yksi (kyseessä on ns. *Doob-Meyer* -hajoitelma). Kutsutaan Λ:aa X:in *kompensaattoriksi*. Heuristisesti,

$$d\Lambda(t) = \mathbb{E}(dX(t) \mid \mathcal{F}_{t-}),$$

missä

$$\mathcal{F}_{t-} = \sigma(\mathcal{F}_s \mid s < t).$$

Täsmällinen perustelu on suoraviivainen, jos tarkastellaan X:ää diskreetteinä ajanhetkinä $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Olkoon nimittäin

$$\lambda(t_i) = \mathbb{E}(X(t_i) - X(t_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}})$$

ja

$$\Lambda(t_i) = X(0) + \sum_{j=1}^{i} \lambda(t_j).$$

Oletuksen (1.15) nojalla Λ on kasvava. Lisäksi

$$\mathbb{E}(X(t_i) - \Lambda(t_i) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}})$$
$$= \mathbb{E}(X(t_i) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}) - (\mathbb{E}(X(t_i) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}) - X(t_{i-1})) - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda(t_j) - X(0)$$
$$= X(t_{i-1}) - \Lambda(t_{i-1}).$$

Siis $M = X - \Lambda$ on martingaali (jos (1.12) toteutuu M:lle).

Jos $\underline{X}$ on neliöintegroituva martingaali s.t. $\mathbb{E}(\underline{X}(t)^2) < \infty, \forall t$, niin

$$\mathbb{E}(\underline{X}(u)^2 \mid \mathcal{F}_t) \geq \mathbb{E}(\underline{X}(u) \mid \mathcal{F}_t)^2 = \underline{X}(t)^2, \forall u > t,$$

(Jensenin epäyhtälö ehdolliselle odotusarvolle). Siis $\underline{X}^2$ on alimartingaali. Merkitään tämän kompensaattoria symbolilla $\langle \underline{X} \rangle$. Kaavan (1.8) nojalla myös $[\underline{X}]$ on alimartingaali, mikäli stokastinen integraali

$$\int_a^t \underline{X}(s-)\, d\underline{X}(s), \quad t \in [a,b],$$

on martingaali ($[\underline{X}](t)$ on $\underline{X}$:n neliöheilahtelu välillä $[a,t]$).

<u>Lemma 1.3</u> Olkoon $\underline{X}$ rajoitetusti heilahteleva neliöintegroituva cadlag-martingaali. Olkoon

$$\underline{X} = \underline{X}_1 - \underline{X}_2,$$

missä $\underline{X}_1$ ja $\underline{X}_2$ ovat kasvavia sopivia cadlag-prosesseja. Oletetaan, että $\mathbb{E}(|\underline{X}_k(t)|) < \infty, \forall t \in [a,b]$, ja

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b |\underline{X}(s-)|\, d\underline{X}_k(s)\right) < \infty, \quad k = 1, 2.$$

Silloin $\langle \underline{X} \rangle$ on myös $[\underline{X}]$:n kompensaattori.

<u>Todistus.</u> Lemmojen 1.1 ja 1.2 nojalla

$$[\underline{X}] = \underline{X}^2 + \text{martingaali}.$$

Koska $\langle \underline{X} \rangle = \underline{X}^2 + \text{martingaali}$, on myös

$$[\underline{X}] = \langle \underline{X} \rangle + \text{martingaali}. \quad \square$$

<u>Lemma 1.4.</u> Olkoon X rajoitetusti heilahteleva cadlag-martingaali ja

$$X = X_1 - X_2,$$

missä X_1 ja X_2 ovat kasvavia, sopivia ja neliöintegroituvia cadlag-prosesseja. Olkoon H vasemmalta jatkuva sopiva rajoitetusti heilahteleva prosessi. Oletetaan, että

$$(1.17) \quad \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b |H(s)|\, d X_k(s)\right)^2\right] < \infty, \quad k = 1, 2,$$

ja

$$(1.19) \quad \mathbb{E}\left(\int_a^b H(s)^2\, d(\langle X(s)\rangle)\right) < \infty.$$

Silloin

$$(1.20) \quad \left\langle \int_a^t H(s)\, d X(s) \right\rangle = \int_a^t H(s)^2\, d(\langle X(s)\rangle), \quad t \in [a,b].$$

Todistus. Oletusten nojalla $\mathbb{E}(|X_k(t)|) < \infty$, $\forall t \in [a,b]$. Oletuksen (1.17) ja lemman 1.2 nojalla

$$t \longmapsto \int_a^t H(s)\, d X(s)$$

määrittelee neliöintegroituvan martingaalin. On siis mielekästä puhua kompensaattorista (1.20).

Todennetaan seuraavaksi, että on riittävää todistaa lemma tapauksessa, jossa

(1.21) $X(a) = 0$, $X_1(a) = 0$ ja $X_2(a) = 0$, $\forall \omega$.

Nämä lisäoletukset pätevät nimittäin martingaalille Y,

$$\begin{cases} Y(t) = X(t) - X(a), & t \in [a,b], \\ Y(t) = Y_1(t) - Y_2(t) \\ Y_k(t) = X_k(t) - X_k(a), & k = 1,2. \end{cases}$$

Kaikki lemman muut oletukset pätevät yo. Y:lle. Nimittäin $dX_k(s) = dY_k(s)$, joten integraalit oletuksissa (1.17) ja (1.18) eivät muutu, kun X_k korvataan Y_k:lle. Lisäksi $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$, joten myös (1.19) pätee Y:lle (perustelu harjoituksissa). Jos (1.20) pätee Y:lle, niin se pätee myös X:lle. Voidaan siis olettaa todistuksessa (1.21).

Merkitään

$$G(t) = \left(\int_a^t H(s)\, d X(s) \right)^2, \quad t \in [a,b].$$

Olkoon ensin $0 \le H(s,\omega) \le B$, $\forall s,\omega$, missä $B > 0$ on vakio. Olkoon $a \le t < u \le b$. Tarkastellaan tihenevää jakoja

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = u,$$

missä t on aina eräs jakopiste. Silloin

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} H(t_i)\left(\underline{X}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i)\right) \right|$$

$$\leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} H(t_i)\left(\underline{X}_1(t_{i+1}) - \underline{X}_1(t_i)\right)\right| + \left| \sum_{i=1}^{n} H(t_i)\left(\underline{X}_2(t_{i+1}) - \underline{X}_2(t_i)\right)\right|$$

$$\leq B\left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\underline{X}_1(t_{i+1}) - \underline{X}_1(t_i) + \underline{X}_2(t_{i+1}) - \underline{X}_2(t_i)\right)\right|$$

$$= B\left(\underline{X}_1(u) + \underline{X}_2(u)\right).$$

Nähdään, että

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} H(t_i)\left(\underline{X}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i)\right)\right)^2$$

$$\leq B^2\left(\underline{X}_1(u) + \underline{X}_2(u)\right)^2.$$

Koska

$$G(u) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=0}^{n-1} H(t_i)\big(\underline{X}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i)\big)\Big)^2,$$

niin dominoitu konvergenssi antaa

$$\mathbb{E}(G(u) \mid \mathcal{F}_t) = G(t)$$

$$+ 2 \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\sum_{t_{i+1}\le t} H(t_i)\big(\underline{X}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i)\big) \sum_{t_{i+1}>t} H(t_i)\big(\underline{X}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i)\big) \Big| \mathcal{F}_t\Big)$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{t_{i+1}>t} H(t_i)\big(\underline{X}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i)\big)\Big)^2 \Big| \mathcal{F}_t\Big].$$

Keskimmäinen rivi on $= 0$, koska $\underline{X}$ on martingaali, kts. (1.14). Suorittamalla toiseen korotus nähdään, että viimeisessä ehdollisessa odotusarvossa nollasta eroavia termejä ovat vain neliöt

$$\mathbb{E}\big(H(t_i)^2 (\underline{X}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i))^2 \mid \mathcal{F}_t\big), \quad t_{i+1} > t.$$

Tällaiselle saadaan esitys

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(H(t_i)^2 (\underline{X}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i))^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}) \mid \mathcal{F}_t\big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(H(t_i)^2 \big[\underline{X}(t_i)^2 - 2\underline{X}(t_i) \underbrace{\mathbb{E}(\underline{X}(t_{i+1}) \mid \mathcal{F}_{t_i})}_{=\underline{X}(t_i)} + \mathbb{E}(\underline{X}(t_{i+1})^2 \mid \mathcal{F}_{t_i})\big] \Big| \mathcal{F}_t\Big)$$

$$= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(H(t_i)^2 (\underline{X}(t_{i+1})^2 - \underline{X}(t_i)^2) \mid \mathcal{F}_{t_i}) \mid \mathcal{F}_t\big)$$

$$= \mathbb{E}\big(H(t_i)^2 (\underline{X}(t_{i+1})^2 - \underline{X}(t_i)^2) \mid \mathcal{F}_t\big).$$

Koska $X(0) = X_1(0) = X_2(0) = 0$, niin

$$\left|\sum_{t_{i+1}>t} H(t_i)^2 \left(X(t_{i+1})^2 - X(t_i)^2 \right)\right|$$

$$\leq \left|\sum_{t_{i+1}>t} H(t_i)^2 \left(X_1(t_{i+1})^2 - X_1(t_i)^2 \right)\right|$$

$$+ \left|\sum_{t_{i+1}>t} H(t_i)^2 \left(X_2(t_{i+1})^2 - X_2(t_i)^2 \right)\right|$$

$$+ 2\left|\sum_{t_{i+1}>t} H(t_i)^2 \left(X_1(t_{i+1}) X_2(t_{i+1}) - X_1(t_i) X_2(t_i) \right)\right|.$$

Itseisarvojen sisällä olevat summattavat ovat ei-negatiivisia, joten saadaan yläraja

$$B^2 \Big(X_1(u)^2 - X_1(t)^2 + X_2(u)^2 - X_2(t)^2$$

$$+ 2 X_1(u) X_2(u) - 2 X_1(t) X_2(t) \Big).$$

Tämä on integroituva. Dominoidun konvergenssin nojalla

(1.21) $\quad \mathbb{E}(G(u) \mid \mathcal{F}_t) = G(t) + \mathbb{E}\left(\int_t^u H(s)^2 \, d(X(s)^2) \;\Big|\; \mathcal{F}_t \right).$

olkoon

$$F(t) = \int_a^t H(s)^2 \, d(\langle X(s)\rangle), \quad t \in [a,b].$$

Tällöin

$$F(t) = \int_a^t H(s)^2 \, d(X(s)^2) + \int_a^t H(s)^2 \, dM(s),$$

missä M on martingaali,

$$\begin{cases} M(t) = \langle X(t)\rangle - X(t)^2 = M_1(t) - M_2(t), \\ M_1(t) = \langle X(t)\rangle + 2X_1(t)\,X_2(t), \\ M_2(t) = X_1(t)^2 + X_2(t)^2. \end{cases}$$

Nyt

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b H(s)^2 \, d(X_k(s)^2)\right) \le B^2 \, \mathbb{E}(X_k(b)^2) < \infty, \quad k = 1,2,$$

ja

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b H(s)^2 \, d(X_1(s)\,X_2(s))\right) \le B^2 \, \mathbb{E}(X_1(b)\,X_2(b)) < \infty,$$

Lemman 1.2 nojalla

$$F(t) = \int_a^t H(s)^2 \, d(X(s)^2) + \text{martingaali}.$$

Nähdään, että

$$\mathbb{E}(F(u) \mid \mathcal{F}_t) = F(t) + \mathbb{E}\left(\int_t^u H(s)^2 d(X(s)^2) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right),$$

ja edelleen, että $G - F$ on martingaali.

Olkoon nyt $H \geq 0$ ja $H^B(s,\omega) = \min(H(s,\omega), B)$, missä $B > 0$ on vakio. Myös H^B täyttää lemman ehdot, joten jo todistetun nojalla

$$\left\langle \int_a^t H^B(s)\, d\,\underline{X}(s) \right\rangle = \int_a^t H^B(s)^2\, d(\langle \underline{X}(s)\rangle).$$

Koska $H^B(s) \uparrow H(s)$, niin

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_a^u H^B(s)\, d\,\underline{X}_k(s)\right)^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right) \to \mathbb{E}\left(\left(\int_a^u H(s)\, d\,\underline{X}_k(s)\right)^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right),$$

$k = 1, 2$, ja

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_a^u H^B(s)\, d\,\underline{X}_1(s)\right)\left(\int_a^u H^B(s)\, d\,\underline{X}_2(s)\right) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right) \to$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_a^u H(s)\, d\,\underline{X}_1(s)\right) \int_a^u H(s)\, d\,\underline{X}_2(s)\right) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right).$$

Täsmälliset perustelut ovat samat kuin lemman 1.2 todistuksessa. Siispä

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_a^u H^B(s)\, d\,\underline{X}(s)\right)^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right) \to \mathbb{E}\left(\left(\int_a^u H(s)\, d\,\underline{X}(s)\right)^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right).$$

Samoin perustein

$$\mathbb{E}\left(\int_a^u H^B(s)^2\, d(\langle \underline{X}(s)\rangle) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right) \to \mathbb{E}\left(\int_a^u H(s)^2\, d(\langle \underline{X}(s)\rangle) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right).$$

Lopulta

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_a^u H(s)\,d\,\underline{X}(s)\right)^2 - \int_a^u H(s)^2\,d(\langle \underline{X}(s)\rangle) \,\Big|\, \mathcal{F}_t \right)$$

$$= \lim_{B\to\infty} \mathbb{E}\left(\left(\int_a^u H^B(s)\,d\,\underline{X}(s)\right)^2 - \int_a^u H^B(s)^2\,d(\langle \underline{X}(s)\rangle) \,\Big|\, \mathcal{F}_t \right)$$

$$= \lim_{B\to\infty} \left[\left(\int_a^t H^B(s)\,d\,\underline{X}(s)\right)^2 - \int_a^t H^B(s)^2\,d(\langle \underline{X}(s)\rangle) \right]$$

$$= \left(\int_a^t H(s)\,d\,\underline{X}(s)\right)^2 - \int_a^t H(s)^2\,d(\langle \underline{X}(s)\rangle).$$

Olkoon nyt H yleinen lemman ehdot täyttävä prosessi ja $H = H^+ - H^-$ kuten lemman 1.2 todistuksessa. Lemman tulos pätee H^+:lle ja H^-:lle. Siis

$$\left\langle \int_a^t H^+(s)\,d\,\underline{X}(s) \right\rangle = \int_a^t H^+(s)^2\,d(\langle \underline{X}(s)\rangle)$$

ja

$$\left\langle \int_a^t H^-(s)\,d\,\underline{X}(s) \right\rangle = \int_a^t H^-(s)^2\,d(\langle \underline{X}(s)\rangle).$$

Koska $(H^+ - H^-)^2 = (H^+)^2 + (H^-)^2$, niin

$$\int_a^t H(s)^2\,d(\langle \underline{X}(s)\rangle)$$

$$= \int_a^t H^+(s)^2\,d(\langle \underline{X}(s)\rangle) + \int_a^t H^-(s)^2\,d(\langle \underline{X}(s)\rangle).$$

Toisaalta

$$\left(\int_a^t H(s)\,d\underline{X}(s)\right)^2$$

$$= \left(\int_a^t H^+(s)\,d\underline{X}(s)\right)^2 + \left(\int_a^t H^-(s)\,d\underline{X}(s)\right)^2$$
$$- 2\left(\int_a^t H^+(s)\,d\underline{X}(s)\right)\left(\int_a^t H^-(s)\,d\underline{X}(s)\right)$$

$$= \int_a^t H^+(s)^2\,d(\langle \underline{X}(s)\rangle) + \int_a^t H^-(s)^2\,d(\langle \underline{X}(s)\rangle)$$
$$- 2\left(\int_a^t H^+(s)\,d\underline{X}(s)\right)\left(\int_a^t H^-(s)\,d\underline{X}(s)\right) + \text{martingaali}.$$

Riittää näyttää, että

$$t \mapsto Q(t) = \left(\int_a^t H^+(s)\,d\underline{X}(s)\right)\left(\int_a^t H^-(s)\,d\underline{X}(s)\right)$$

määrittelee martingaalin. Jos $|H(s,\omega)| \le B$ eräälle $B > 0$, $\forall s,\omega$, niin voidaan käyttää approksimaatiota todistuksen alkuosan tapaan ja saadaan

$$\mathbb{E}(Q(u) \mid \mathcal{F}_t) = Q(t)$$
$$+ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{t_{i+1} > t} \underbrace{H^+(t_i)H^-(t_i)}_{=0}\,(\underline{X}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i))^2 \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big)$$

$$= Q(t).$$

Yleinen tapaus saadaan konvergenssilauseiden avulla aiempien todistusten tapaan. $\square$

Olkoot X ja Y kaksi neliöintegroituvaa martingaalia. Tällöin usein

$$XY = \phi + M(t), \quad M(0)=0,$$

missä ϕ on jatkuva rajoitetusti heilahteleva sopiva prosessi ja M martingaali. Myös tällaisia esityksiä on korkeintaan yksi. Perustelu ksi kirjoitetaan

$$XY = \tfrac{1}{4}\left((X+Y)^2 - (X-Y)^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\Big(\underbrace{\langle X+Y\rangle - \langle X-Y\rangle}_{\substack{\text{jatkuva ja rajoitetusti} \\ \text{heilahteleva}}} + \text{martingaali}\Big).$$

Merkitään yo. prosessia symbolilla $\langle X, Y\rangle$, siis $\phi = \langle X, Y\rangle$.

Nimityksiä:

$\langle X\rangle$ = X:n <u>ennustettava varianssiprosessi</u>,

$\langle X, Y\rangle$ = X:n ja Y:n <u>ennustettava kovarianssiprosessi</u>.

Lemma 1.5. Olkoot X ja Y kaksi rajoitetusti heilahtelevaa cadlag-martingaalia ja

$$X = X_1 - X_2, \qquad Y = Y_1 - Y_2,$$

missä X_1, X_2, Y_1 ja Y_2 ovat kasvavia, sopivia ja neliöintegroituvia cadlag-prosesseja. Olkoot H_1 ja H_2 kaksi vasemmalta jatkuvaa, sopivaa ja rajoitetusti heilahtelevaa prosessia. Oletetaan, että

$$\mathbb{E}\Big(\Big(\int_a^b |H_1(s)|\, d X_k(s)\Big)^2\Big) < \infty, \quad \mathbb{E}\Big(\Big(\int_a^b |H_2(s)|\, d Y_k(s)\Big)^2\Big) < \infty, \quad k = 1, 2,$$

ja

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b |H_1(s)|\,|H_2(s)|\, d Z_k(s)\Big) < \infty, \quad k = 1, 2,$$

missä $\langle X, Y \rangle = Z_1 - Z_2$, ja Z_1 ja Z_2 ovat kasvavia, sopivia ja integroituvia cadlag-prosesseja. Silloin

$$\Big\langle \int_a^t H_1(s)\, d X(s), \int_a^t H_2(s)\, d Y(s) \Big\rangle$$

$$= \int_a^t H_1(s) H_2(s)\, d\big(\langle X, Y \rangle(s)\big).$$

Lemman 1.5 todistus. Todistus on lemman 1.4 laajennus.

Oletusten ja lemman 1.2 nojalla sekä

$$t \longmapsto \int_a^t H_1(s)\, d\mathbb{X}(s)$$

että

$$t \longmapsto \int_a^t H_2(s)\, d\mathbb{Y}(s)$$

määrittelee neliöintegroituvan martingaalin. Siis lemman väitteestä on mielekästä puhua.

On riittävää todistaa lemma tapauksessa, jossa

$$\mathbb{X}(a) = \mathbb{X}_1(a) = \mathbb{X}_2(a) = 0, \quad \mathbb{Y}(a) = \mathbb{Y}_1(a) = \mathbb{Y}_2(a) = 0. \tag{1.22}$$

Tähän tilanteeseen nimittäin päästään muunnoksilla

$$\begin{cases} \underline{\mathbb{X}}(t) = \mathbb{X}(t) - \mathbb{X}(a), & \underline{\mathbb{X}}_k(t) = \mathbb{X}_k(t) - \mathbb{X}_k(a), \quad k=1,2 \\ \underline{\mathbb{Y}}(t) = \mathbb{Y}(t) - \mathbb{Y}(a), & \underline{\mathbb{Y}}_k(t) = \mathbb{Y}_k(t) - \mathbb{Y}_k(a), \quad k=1,2 \\ \underline{\mathbb{X}}(t) = \underline{\mathbb{X}}_1(t) - \underline{\mathbb{X}}_2(t), & \underline{\mathbb{Y}}(t) = \underline{\mathbb{Y}}_1(t) - \underline{\mathbb{Y}}_2(t). \end{cases}$$

Lemman oletukset pätevät muunnetulle prosessille, erityisesti

$$\langle \underline{\mathbb{X}}, \underline{\mathbb{Y}} \rangle = \langle \mathbb{X}, \mathbb{Y} \rangle,$$

ja tulos muunnetulle ja alkuperäiselle prosessille on sama. Voidaan siis olettaa (1.22).

Merkitään

$$G(t) = \int_a^t H_1(s)\,d\,X(s) \int_a^t H_2(s)\,dY(s), \quad t \in [a,b].$$

Olkoon ensin $0 \le H_k(s,\omega) \le B$, $\forall s,\omega$, missä $B>0$ on vakio. Olkoon $a \le t < u \le b$. Tarkastellaan tihenevää jakoa

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = u,$$

missä t on aina eräs jakopiste. Silloin

$$\left| \sum_{i=1}^{n} H_1(t_i)\left(X(t_{i+1}) - X(t_i)\right)\right| \le B\left(X_1(u) + X_2(u)\right)$$

ja

$$\left| \sum_{i=1}^{n} H_2(t_i)\left(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)\right)\right| \le B\left(Y_1(u) + Y_2(u)\right),$$

ks. lemman 1.4 todistus. Siis

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{n} H_1(t_i)\left(X(t_{i+1}) - X(t_i)\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} H_2(t_i)\left(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)\right)\right)\right|$$

$$\le B^2\left(X_1(u) + X_2(u)\right)\left(Y_1(u) + Y_2(u)\right).$$

Tämä on integroituva, joten voidaan soveltaa dominoidun konvergenssin lausetta seuraavassa. Saadaan

$$\mathbb{E}(G(u) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\Big(\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} H_1(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)) \cdot \sum_{i=1}^{n} H_2(t_i)(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)) \Big) \Big| \mathcal{F}_t \Big)$$

$$= G(t) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{t_{i+1} \le t} H_1(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)) \Big) \cdot \Big(\sum_{t_{i+1} > t} H_2(t_i)(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)) \Big) \Big| \mathcal{F}_t \Big)$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{t_{i+1} > t} H_1(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)) \Big) \cdot \Big(\sum_{t_{i+1} < t} H_2(t_i)(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)) \Big) \Big| \mathcal{F}_t \Big)$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{t_{i+1} > t} H_1(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)) \Big) \cdot \Big(\sum_{t_{i+1} > t} H_2(t_i)(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)) \Big) \Big| \mathcal{F}_t \Big)$$

Jos $t_j > t_i$, niin esimerkiksi

$$\mathbb{E}\big(H_1(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)) H_2(t_j)(Y(t_{j+1}) - Y(t_j)) \mid \mathcal{F}_t \big)$$

$$= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{F}_{t_j}))$$

$$= \mathbb{E}\big(H_1(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)) H_2(t_j) \underbrace{\mathbb{E}(Y(t_{j+1}) - Y(t_j) \mid \mathcal{F}_{t_j})}_{=0} \mid \mathcal{F}_t \big)$$

$$= 0.$$

Siis

$$\mathbb{E}(G(u) \mid \mathcal{F}_t) = G(t)$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\sum_{t_{i+1} > t} H_1(t_i)(\underline{X}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i)) H_2(t_i)(\underline{Y}(t_{i+1}) - \underline{Y}(t_i)) \Big| \mathcal{F}_t \Big)$$

Yksittäisen termin ehdollinen odotusarvo summassa on

$$\mathbb{E}\big(H_1(t_i) H_2(t_i)\, \mathbb{E}(\underline{X}(t_{i+1}) \underline{Y}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_{i+1}) \underline{Y}(t_i) - \underline{X}(t_i) \underline{Y}(t_{i+1})$$

$$+ \underline{X}(t_i) \underline{Y}(t_i) \mid \mathcal{F}_{t_i}) \mid \mathcal{F}_t \big)$$

$$= \mathbb{E}\big(H_1(t_i) H_2(t_i) (\mathbb{E}(\underline{X}(t_{i+1}) \underline{Y}(t_{i+1}) \mid \mathcal{F}_{t_i}) - \underline{X}(t_i) \underline{Y}(t_i)) \mid \mathcal{F}_t \big)$$

$$= \mathbb{E}\big(H_1(t_i) H_2(t_i)\, \mathbb{E}(\underline{X}(t_{i+1}) \underline{Y}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i) \underline{Y}(t_i) \mid \mathcal{F}_{t_i}) \mid \mathcal{F}_t \big)$$

$$= \mathbb{E}\big(H_1(t_i) H_2(t_i) (\underline{X}(t_{i+1}) \underline{Y}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i) \underline{Y}(t_i) \mid \mathcal{F}_t \big).$$

Kirjoittamalla

$$\underline{X}(t_{i+1}) \underline{Y}(t_{i+1}) - \underline{X}(t_i) \underline{Y}(t_i)$$

$$= \underline{X}_1(t_{i+1}) \underline{Y}_1(t_{i+1}) - \underline{X}_1(t_i) \underline{Y}_1(t_i)$$

$$- (\underline{X}_1(t_{i+1}) \underline{Y}_2(t_{i+1}) - \underline{X}_1(t_i) \underline{Y}_2(t_i))$$

$$- (\underline{X}_2(t_{i+1}) \underline{Y}_1(t_{i+1}) - \underline{X}_2(t_i) \underline{Y}_1(t_i))$$

$$+ \underline{X}_2(t_{i+1}) \underline{Y}_2(t_{i+1}) - \underline{X}_2(t_i) \underline{Y}_2(t_i)$$

nähdään kuten lemmassa 1.4, että

$$\left| \sum_{t_{i+1} > t} H_1(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)) H_2(t_i)(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)) \right|$$

$$\leq B^2 (X_1(u) Y_1(u) + X_1(u) Y_2(u) + X_2(u) Y_1(u) + X_2(u) Y_2(u))$$

Tämä on integroituva, joten

$$\mathbb{E}(G(u) \mid \mathcal{F}_t) = G(t) + \mathbb{E}\left(\int_t^u H_1(s) H_2(s)\, d(X(s) Y(s)) \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Olkoon

$$F(t) = \int_a^t H_1(s) H_2(s)\, d(\langle X, Y \rangle (s)).$$

Tällöin

$$F(t) = \int_a^t H_1(s) H_2(s)\, d(X(s) Y(s)) - \int_a^t H_1(s) H_2(s)\, d M(s),$$

missä M on martingaali,

$$\begin{cases} M(t) = \langle X, Y \rangle (t) - X(t) Y(t) = M_1(t) - M_2(t) \\ M_1(t) = Z_1(t) + X_1(t) Y_2(t) + X_2(t) Y_1(t) \\ M_2(t) = Z_2(t) + X_1(t) Y_1(t) + X_2(t) Y_2(t). \end{cases}$$

Lemmasta 1.2 seuraa, että

$$F(t) = \int_a^t H_1(s) H_2(s)\, d(X(s) Y(s)) + \text{martingaali}$$

ja edelleen, että $G - F$ on martingaali.

Olkoot nyt $H_1 \geq 0$ ja $H_2 \geq 0$ sekä

$$H_k^B(s,\omega) = \min(H_k(s,\omega), B), \quad k = 1,2.$$

Jo todistetun nojalla lemman väite on tosi, kun H_k korvataan H_k^B:lla. Monotonisen konvergenssin nojalla

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^u H_1^B(s)\, dX_j(s) \int_a^u H_2^B(s)\, dY_k(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big) \uparrow$$

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^u H_1(s)\, dX_j(s) \int_a^u H_2(s)\, dY_k(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big),$$

$j,k = 1,2$. Siis pä

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^u H_1^B(s)\, dX(s) \int_a^u H_2^B(s)\, dY(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big)$$

$$\to \mathbb{E}\Big(\int_a^u H_1(s)\, dX(s) \int_a^u H_2(s)\, dY(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big).$$

Samoin nähdään, että

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^u H_1^B(s) H_2^B(s)\, d(\langle X, Y\rangle(s)) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big)$$

$$\to \mathbb{E}\Big(\int_a^u H_1(s) H_2(s)\, d(\langle X, Y\rangle(s)) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big).$$

Edelleen

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^u H_1(s)\, d\,Z(s) \int_a^u H_2(s)\, dY(s) - \int_a^u H_1(s) H_2(s)\, d(\langle Z, Y\rangle(s)) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big)$$

$$= \lim_{B\to\infty} \mathbb{E}\Big(\int_a^u H_1^B(s)\, d\,Z(s) \int_a^u H_2^B(s)\, dY(s) - \int_a^u H_1^B(s) H_2^B(s)\, d(\langle Z, Y\rangle(s)) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big)$$

$$= \lim_{B\to\infty} \Big(\int_a^t H_1^B(s)\, d\,Z(s) \int_a^t H_2^B(s)\, dY(s) - \int_a^t H_1^B(s) H_2^B(s)\, d(\langle Z, Y\rangle(s))\Big)$$

$$= \int_a^t H_1(s)\, d\,Z(s) \int_a^t H_2(s)\, dY(s) - \int_a^t H_1(s) H_2(s)\, d(\langle Z, Y\rangle(s)) .$$

Olkoot lopuksi H_1 ja H_2 yleisiä ja

$$H_1 = H_1^+ - H_1^- , \qquad H_2 = H_2^+ - H_2^- .$$

Lemman tulos pätee positiivi- ja negatiivisille H_1^+, H_1^-, H_2^+ ja H_2^-. Ilmeisesti

$$\int_a^t H_1(s) H_2(s)\, d(\langle Z, Y\rangle(s))$$

$$= \int_a^t H_1^+(s) H_2^+(s)\, d(\langle Z, Y\rangle(s))$$

$$- \int_a^t H_1^+(s) H_2^-(s)\, d(\langle Z, Y\rangle(s))$$

$$- \int_a^t H_1^-(s) H_2^+(s)\, d(\langle Z, Y\rangle(s))$$

$$+ \int_a^t H_1^-(s) H_2^-(s)\, d(\langle Z, Y\rangle(s)) .$$

Toisaalta

$$\int_a^t H_1(s)\, d\,\underline{X}(s) \int_a^t H_2(s)\, d\,\underline{Y}(s)$$

$$= \int_a^t H_1^+(s)\, d\,\underline{X}(s) \int_a^t H_2^+(s)\, d\,\underline{Y}(s)$$

$$- \int_a^t H_1^+(s)\, d\,\underline{X}(s) \int_a^t H_2^-(s)\, d\,\underline{Y}(s)$$

$$- \int_a^t H_1^-(s)\, d\,\underline{X}(s) \int_a^t H_2^+(s)\, d\,\underline{Y}(s)$$

$$+ \int_a^t H_1^-(s)\, d\,\underline{X}(s) \int_a^t H_2^-(s)\, d\,\underline{Y}(s).$$

Jo todistetun nojalla esimerkiksi

$$\int_a^t H_1^+(s)\, d\,\underline{X}(s) \int_a^t H_2^+(s)\, d\,\underline{Y}(s)$$

$$= \int_a^t H_1^+(s)\, H_2^+(s)\, d(\langle \underline{X}, \underline{Y}\rangle(s)) + \text{martingaali}.$$

Nähdään, että

$$\int_a^t H_1(s)\, d\,\underline{X}(s) \int_a^t H_2(s)\, d\,\underline{Y}(s)$$

$$= \int_a^t H_1(s)\, H_2(s)\, d(\langle \underline{X}, \underline{Y}\rangle(s)) + \text{martingaali}. \quad \square$$