Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssi (4 op)
Kevät 2013
Harri Nyrhinen
Helsingin yliopisto

Johdanto

Henkivakuutuksessa on usein luonnollista tarkastella vakuutetun tilaa jatkuva-aikaisesti. Sopimuksiin perustuvat korvaukset ja vakuutusmaksut taas riippuvat kulloisestakin tilasta. Toisaalta sopimuksiin liittyy usein kiinteään ajanhetkeen liittyviä korvauksia (esimerkiksi elämänvakuutuksen korvaus). Erityyppiset sopimukset käsitellään usein kukin erikseen. Eduksi yleisten sopimusten käsittelyssä olisi löytää yksi tapa, jolla kaikki vaihtoehdot voitaisiin kuvata ja analysoida.

Osoittautuu, että Lebesgue-Stieltjes-integraali on sopiva käsite edellä esitettyyn tarkoitukseen. Tällöin tarkastelu on systemaattisesti polkuittaista. Tämä tuo ehkä jonkin verran raskautta teoriaan, mutta antaa systemaattisen otteen lisäksi uusia aseita asioiden selvittämiseen. Erityisesti stokastisen analyysin tulokset ovat hyödyksi.

Kurssilla tarkastellaan henkivakuutussopimuksia polkutasolla. Tarvittava teoria esitetään kurssin alussa. Sovelluksia esitetään kurssin jälkipuoliskolla.

1. Matemaattista taustaa

Esitellään katsauksen omaisesti tarvittavia käsitteitä ja tuloksia reaalianalyysistä ja stokastisesta analyysistä.

1.1. Lebesgue-Stieltjes -integraalista

Olkoon $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ kiinteä väli, $a \leq b$. Funktiota $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kutsutaan *rajoitetusti heilahtelevaksi* (r. h.), jos

$$V_a^b(f) \doteq \sup\Big\{ \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \;;\; a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b,\; n \in \mathbb{N} \Big\}$$

on äärellinen. Tällöin $V_a^b(f)$ on f:n *kokonaisheilahtelu* välillä $[a,b]$. Funktio

$$t \longmapsto V_a^t(f), \quad t \in [a,b],$$

on f:n *heilahdusfunktio*.

Helposti nähdään, että kasvava funktio on rajoitetusti heilahteleva, samoin kahden kasvavan funktion erotus. Epätriviaalimpi on käänteinen tulos: jos f on rajoitetusti heilahteleva, niin $f = f_1 - f_2$, missä f_1 ja f_2 ovat kasvavia. Nähdään, että rajoitetusti heilahtelevalla funktiolla on korkeintaan numeroituva määrä epäjatkuvuuspisteitä ja että näissä f:llä on hyppy. Ts. jos $t \in [a,b]$ on epäjatkuvuuspiste, niin $\exists\, \varepsilon > 0$:

$$|f(s) - f(t)| > \varepsilon, \quad \forall\, s \in (t-\delta, t)$$

tai

$$|f(s) - f(t)| > \varepsilon, \quad \forall\, s \in (t, t+\delta),$$

kunhan $\delta > 0$ on riittävän pieni.

Kutsutaan f:ää *cadlag-funktioksi*, jos f on oikealta jatkuva ja vasemman puoleiset raja-arvot

$$f(t-) = \lim_{s \to t-} f(s)$$

ovat olemassa, $\forall t \in (a,b]$. Jos f on rajoitetusti heilahteleva, niin

$$t \mapsto f(t+) = \lim_{s \to t+} f(s)$$

määrittelee cadlag-funktion (pisteessä $t = b$ sovitaan, että $f(b+) = f(b)$, vastaavasti aina $f(a-) = f(a)$).

Olkoon g kasvava ja cadlag. Tällöin voidaan määritellä *mitta* m_g välillä $[a,b]$, joka täyttää ehdon

$$m_g((\alpha,\beta]) = g(\beta) - g(\alpha), \ \forall \alpha \geq a, \ \beta \in (\alpha, b].$$

Lisäksi sovitaan, että $m_g(\{a\}) = 0$. Mitan yleiset ominaisuudet: m_g liittää jokaiseen Borel-joukkoon $B \subseteq [a,b]$ reaaliluvun, joka täyttää ehdot

(i) $m_g(\emptyset) = 0$

(ii) $m_g(B) \geq 0, \ \forall B \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ = Borel-joukot $\subseteq [a,b]$)

(iii) $m_g\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m_g(B_i)$,

jos B_i:t erillisiä, $B_i \subseteq [a,b]$, $B_i \in \mathcal{B}$.

Olkoon $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mitallinen ja muotoa

$$(1.1) \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, 1(t \in B_i), \quad a_i \geq 0, \; B_i \in \mathcal{B},$$

missä B_i:t muodostavat $[a,b]$:n ositelmen. Tällaisen funktion Lebesgue-Stieltjes-integraali (g:n suhteen) määritellään yhtälöllä

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, m_g(B_i).$$

Jos $f \geq 0$ ja $f_n(t) \uparrow f(t)$ pisteittäin, missä f_n:t ovat muotoa (1.1), määritellään

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, dg(t).$$

Voidaan osoittaa, että $\int_a^b f(t)\, dg(t)$ on hyvin määritelty ts. ei riipu valitusta jonosta (f_n). Yleisen mitallisen kuvauksen f Lebesgue-Stieltjes-integraali on

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \int_a^b f^+(t)\, dg(t) - \int_a^b f^-(t)\, dg(t),$$

mikäli oikean puolen integraalit ovat äärellisiä ($f^+(t) = f(t)\, 1(f(t) \geq 0)$, $f^-(t) = -f(t)\, 1(f(t) \leq 0)$). Nimityş: g on <u>integraattori</u>, f on <u>integrandi</u>. Tällöin f on <u>integroituva</u>.

<u>Esimerkki 1.1</u> Olkoon ξ satunnaismuuttuja, jolle $\mathbb{P}(\xi \in [a,b]) = 1$ ja F ξ:n kertymäfunktio. Jos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen ja $\mathbb{E}(f(\xi))$ on olemassa, niin

$$\mathbb{E}(f(\xi)) = \int_a^b f(t)\, dF(t).$$

Esimerkki 1.2. Tarkastellaan sopimusta, jossa tapahtuu rahasuoritus S hetkellä n. Tämän nykyarvo (hetkellä nolla) on $e^{-\delta n} S$, missä δ on korkointensiteetti. Ilmeisesti tämä voidaan esittää integraalina

$$\int_0^n e^{-\delta t}\, dg(t) = e^{-\delta n} S,$$

kun $g(t) = S\, 1(t \geq n)$.

Edellä esitetyllä integraalikäsitteellä on mm. seuraavia ominaisuuksia

$$(1.2) \quad \int_a^b (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t))\, dg(t)$$
$$= \alpha_1 \int_a^b f_1(t)\, dg(t) + \alpha_2 \int_a^b f_2(t)\, dg(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},$$

$$(1.3) \quad f_1 \geq f_2 \Rightarrow \int_a^b f_1(t)\, dg(t) \geq \int_a^b f_2(t)\, dg(t),$$

$$(1.4) \quad \int_a^b f(t)\, d(\alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t))$$
$$= \alpha_1 \int_a^b f(t)\, dg_1(t) + \alpha_2 \int_a^b f(t)\, dg_2(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0,$$

g_1, g_2 kasvavia cadlag-funktioita

Seuraavat rajankäynnin ja integroinnin järjestyksen vaihtoa koskevat tulokset tulevat usein käyttöön.

<u>Monotonisen konvergenssin lause.</u> Olkoon (f_n) pisteittäin kasvava jono ei-negatiivisia integroituvia funktioita ja

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

Silloin

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)\,dg(t).$$

(Lauseessa sallitaan myös $+\infty$ funktioiden ja integraalien arvona; tulos pätee sopimuksella $0 \cdot \infty = 0$).

<u>Dominoidun konvergenssin lause.</u> Olkoon (f_n) jono integroituvia funktioita ja

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) \quad \text{m.k.} \quad \text{(melkein kaikkialla)}$$

toisin sanoen raja-arvo on olemassa paitsi eräässä joukossa B, jolle $m_g(B) = 0$. Oletetaan, että

$$|f_n(t)| \le h(t), \quad \text{m.k.},$$

missä $\int_a^b h(t)\,dg(t) < \infty$. Silloin

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)\,dg(t).$$

Jatkossa (yleensä) f on vasemmalta jatkuva ja rajoitetusti heilahteleva. Tällöin

(1.5) $$\int_a^b f(t)\,dg(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\big(g(t_{i+1}) - g(t_i)\big),$$

missä $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $\max_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \to 0$.

Tämä seuraa dominoidun konvergenssin lauseesta. Jos g on lisäksi derivoituva ja f ja g' Riemann-integroituvia, niin

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Jos g:llä on hyppy pisteessä $c \in (a,b)$ ja g' on olemassa muualla sekä f ja g' ovat Riemann-integroituvia, niin

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt + f(c)\big(g(c) - g(c-)\big),$$

missä $g'(c)$ voidaan valita vapaasti.

Lebesgue-Stieltjes-integraali voidaan laajentaa koskemaan rajoitetusti heilahtelevia cadlag-integraattoreita. Jos g on tällainen ja $g = g_1 - g_2$, missä g_1 ja g_2 ovat kasvavia cadlag-funktioita, määritellään

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)\,dg_1(t) - \int_a^b f(t)\,dg_2(t),$$

mikäli oikealla puolella olevat integraalit ovat äärellisinä olemassa. Ominaisuudet (1.2) ja (1.4) säilyvät (α_1, α_2 voivat olla myös negatiivisia (1.4):ssä). Samoin (1.5) pätee mainitun tyyppisillä f:illä.

Todetaan vielä, että jos f on cadlag-funktio, niin (1.5) pätee, kun jakopisteet valitaan sopivasti (siten, että f:n hyppykohdat esiintyvät jakopisteinä rajalla).

Olkoon f rajoitetusti heilahteleva cadlag-funktio. Määritellään f:n neliöheilahtelu $[f]$ (välillä $[a,b]$) ehdosta

$$(1.4)\qquad [f] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right)^2,$$

missä $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ ja

$\max_{i=0}^{n-1} |t_{i+1} - t_i| \to 0$, kun $n \to \infty$. Lemmassa 1.1 osoitetaan, että $[f]$ on hyvin määritelty ts. ei riipu jakopisteiden valinnasta.

Määritellään funktiot f^d ja f^c ehdoista

$$f^d(t) = \sum_{s\in[a,t]} \left(f(s) - f(s-)\right)$$

(summa on korkeintaan numeroituva)

ja

$$f^c(t) = f(t) - f^d(t).$$

Tällöin f^d sisältää täsmälleen samat hypyt kuin f ja f^c on jatkuva. Lisäksi f^d ja f^c ovat rajoitetusti heilahtelevia. Perustelu:

1) Olkoon aluksi f kasvava. Selvästi

$$f^d(t) - f^d(t-) = \sum_{s\in[a,t]} \left(f(s) - f(s-)\right) - \lim_{u\to t-} \sum_{s\in[a,u]} \left(f(s) - f(s-)\right)$$

$$= \lim_{u\to t-} \sum_{u<s\le t} \left(f(s) - f(s-)\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \le \lim_{u\to t-} \left(f(t) - f(u-)\right) = f(t) - f(t-) \\ \ge \lim_{u\to t-} \left(f(t) - f(t-)\right) = f(t) - f(t-). \end{array}\right.$$

Siis $f^d(t) - f^d(t-) = f(t) - f(t-)$, $\forall t \in [a,b]$. Selvää on, että f^d on oikealta jatkuva (koska f on sitä). Samoin siis f^c on oikealta jatkuva. Toisaalta

$$\lim_{u \to t-} f^c(u) = \lim_{u \to t-} (f(u) - f^d(u)) = f(t-) - f^d(t-)$$
$$= f(t) - f^d(t) = f^c(t).$$

Siis f^c on jatkuva. Koska f^d on kasvava, on se rajoitetusti heilahteleva. Samoin on siis f^c kahden kasvavan funktion erotuksena.

2) Olkoon $f = f_1 - f_2$, missä f_1 ja f_2 ovat kasvavia. Korvaamalla $f_i(t)$ $f_i(t+)$:lla nähdään, että f_1 ja f_2 voidaan valita cadlag-funktioiksi. Ilmeisesti tällöin

$$f^d(t) = f_1^d(t) - f_2^d(t),$$

$$f^c(t) = f_1^c(t) - f_2^c(t), \quad \forall t.$$

Väitetyt tulokset seuraavat siis kohdasta 1).

<u>Lemma 1.1</u> Olkoon f rajoitetusti heilahteleva cadlag-funktio. Silloin $[f]$ on hyvin määritelty, $[f] = [f^d]$ ja

$$(1.8) \quad [f] = f(b)^2 - f(a)^2 - 2\int_a^b f(s-)\,df(s).$$

Todistus. Kirjoitetaan

$$(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 = (f^d(t_{i+1}) - f^d(t_i))^2 + (f^c(t_{i+1}) - f^c(t_i))^2$$
$$+ 2(f^d(t_{i+1}) - f^d(t_i))(f^c(t_{i+1}) - f^c(t_i)).$$

Koska f^c on tasaisesti jatkuva, niin

$$\sum_{i=0}^{n-1} (f^c(t_{i+1}) - f^c(t_i))^2 \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} |f^c(t_{i+1}) - f^c(t_i)|,$$

kun jako on riittävän tiheä. Viimeinen summa on rajoitettu, koska f^c on rajoitetusti heilahteleva. Tämä osa ~~siis~~ $\to 0$, kun $n \to \infty$. Summa

$$(1.9) \qquad 2\sum_{i=0}^{n-1} (f^d(t_{i+1}) - f^d(t_i))(f^c(t_{i+1}) - f^c(t_i))$$

käsitellään samoin (myös f^d on rajoitetusti heilahteleva). Siis myös (1.9) suppenee kohti nollaa ja $[f] = [f^d]$.

Yhtälön (1.8) todistamiseksi kirjoitetaan

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1})\left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right) - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(t_{i+1}) + f(t_i)\right)\left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right) - 2\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right)$$

$$= f(b)^2 - f(a)^2 - 2\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right).$$

Viimeinen summa on

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(f(t_i) - f(t_i-)\right)\left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right) + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i-)\left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right)}_{\xrightarrow{\text{Okh}} \int_a^b f(s-)\,df(s)}.$$

Ensimmäinen summa on itseisarvoltaan korkeintaan

$$\sum_{|f(t_i)-f(t_i-)|>1/M} |f(t_i) - f(t_i-)|\,|f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

$$+ \sum_{|f(t_i)-f(t_i-)| \le \frac{1}{M}} \frac{1}{M}\,|f(t_{i+1}) - f(t_i)| \doteq \Sigma' + \Sigma''$$

Itseisarvoltaan $1/M$:ää suurempien hyppyjen lukumäärä on äärellinen. Valitsemalla $\max|t_{i+1} - t_i|$ sellaiseksi, että $|f(t_{i+1}) - f(t_i)| < \varepsilon$ näissä pisteissä nähdään, että

$$\Sigma' \le \varepsilon \sum_{|f(t_i)-f(t_i-)|>\frac{1}{M}} |f(t_i) - f(t_i-)|.$$

Lisäksi $\Sigma'' \le \frac{1}{M} V_a^b(f)$. Siis $\Sigma' + \Sigma'' \to 0$. $\square$

Olkoot f ja g kaksi rajoitetusti heilahtelevaa cadlag-funktiota. Määritellään f:n ja g:n <u>yhteisheilahtelu</u> $[f, g]$ välillä $[a,b]$ ehdosta

$$[f,g] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(t_{i+1}) - f(t_i))(g(t_{i+1}) - g(t_i)),$$

missä $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} = t_n = b$ ja $\max_{i=0}^{n-1} |t_{i+1} - t_i| \to 0$, kun $n \to \infty$.

<u>Lemma 1.1.1.</u> Olkoot f ja g rajoitetusti heilahtelevia cadlag-funktioita. Silloin $[f,g]$ on hyvin määritelty,

$$(1.10) \quad [f,g] = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(s-)\,dg(s) - \int_a^b g(s-)\,df(s)$$

ja

$$(1.11) \quad [f,g] = [f^d, g^d].$$

<u>Todistus.</u> Käytetään identiteettiä

$$xy = \tfrac{1}{4}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right), \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} (f(t_{i+1}) - f(t_i))(g(t_{i+1}) - g(t_i))$$

$$= \tfrac{1}{4}\Big[\sum_{i=1}^{n} \big(f(t_{i+1}) - f(t_i) + g(t_{i+1}) - g(t_i)\big)^2$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \big(f(t_{i+1}) - f(t_i) - g(t_{i+1}) + g(t_i)\big)^2\Big]$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}\left[[f+g] - [f-g] \right]$$

$$\overset{\text{Lemma 1.1}}{=} \frac{1}{4}\Big[(f(b)+g(b))^2 - (f(a)+g(a))^2 - 2\int_a^b (f(s-)+g(s-))\,d(f(s)+g(s))$$

$$- \Big((f(b)-g(b))^2 - (f(a)-g(a))^2 - 2\int_a^b (f(s-)-g(s-))\,d(f(s)-g(s)) \Big) \Big]$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(s-)\,dg(s) - \int_a^b g(s-)\,df(s).$$

Siis $[f,g]$ on hyvin määritelty ja (1.10) on todistettu. Jos f on jatkuva ja g rajoitetusti heilahteleva, niin

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (f(t_{i+1}) - f(t_i))(g(t_{i+1}) - g(t_i)) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|\,|g(t_{i+1}) - g(t_i)| \leq \varepsilon V_a^b(g),$$

kun jako on riittävän tiheä. Siis $[f,g] = 0$. Yleisesti

$$[f_1 + f_2, g_1 + g_2] = [f_1, g_1] + [f_1, g_2] + [f_2, g_1] + [f_2, g_2],$$

kun f_1, f_2, g_1 ja g_2 ovat rajoitetusti heilahtelevia cadlag-funktioita. Edellä todetun nojalla

$$[f,g] = [f^c + f^d, g^c + g^d] = [f^d, g^d]. \qquad \square$$

Lemman 1.1.1 tulosta kutsutaan osittaisintegrointikaavaksi.

Yhteisheilahtelu voidaan siis määrätä integroimalla. Käyttökelpoinen on myös seuraava esitys.

Lemma 1.1.2. Lemman 1.1.1 oletuksin ja merkinnöin

$$[f,g] = \sum_{s\in[a,b]} (f(s)-f(s-))(g(s)-g(s-)).$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $f=g$ ja että f on kasvava. Koska

$$[f]=[f^d] \quad \text{ja} \quad f(s)-f(s-)=f^d(s)-f^d(s-),$$

voidaan olettaa, että f on puhdas hyppyfunktio:

$$f(t) = \sum_{s\le t} (f(s)-f(s-)).$$

Olkoon (f_N) jono kasvavia cadlag-funktioita, $f_N(a)=0$, $\forall N$, ja $f_N \uparrow f$ pisteittäin. Osoitetaan, että

(1.13) $\quad [f_N] \to [f]$, kun $N\to\infty$.

Ensinnäkin

$$\int_a^b f_N(s-)\,df_N(s)$$

$$= \int_a^b f_N(s-)\,df(s) + \int_a^b f_N(s-)\,d(f_N(s)-f(s))$$

Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\int_a^b f_N(s-)\,df(s) \to \int_a^b f(s-)\,df(s), \quad N\to\infty.$$

Toisaalta

$$0 \geq \int_a^b f_N(s-)\, d\left(f_N(s) - f(s)\right)$$

$$\geq f(b) \int_a^b d\left(f_N(s) - f(s)\right) = f(b)\left(f_N(b) - f(b)\right).$$

Nähdään, että

$$\int_a^b f_N(s-)\, d f_N(s) \to \int_a^b f(s-)\, d f(s).$$

Väite (1.13) seuraa lemmasta 1.1.

Olkoot $a_1, a_2, \ldots$ funktion f hyppykohdat. Tällöin

$$f(t) = \sum_{a_i \leq t} \left(f(a_i) - f(a_i-)\right).$$

Olkoot $a_1^{(N)}, a_2^{(N)}, \ldots$ ne funktion f hyppykohdat, joille

$$f(a_i^{(N)}) - f(a_i^{(N)}-) > \frac{1}{N},$$

ja olkoon

$$f_N(t) = \sum_{a_i^{(N)} \leq t} \left(f(a_i^{(N)}) - f(a_i^{(N)}-)\right).$$

Ilmeisesti $f_N \uparrow f$, joten voidaan soveltaa tulosta (1.13). Nyt

$$[f_N] = \sum_{a_i^{(N)} \leq b} \left(f(a_i^{(N)}) - f(a_i^{(N)}-)\right)^2$$

$$\to \sum_{a_i \leq b} \left(f(a_i) - f(a_i-)\right)^2$$

$$= \sum_{s \in [a,b]} \left(f(s) - f(s-)\right)^2, \quad N \to \infty.$$

Yleinen tapaus jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$