Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 5, 8.5.2013

Kuvatkoon harjoitusten 4 mukainen prosessi Z vakuutetun tilaa ajassa ja olkoon vakuutustapahtuma tehtävän 5 mukainen. Vakuutuskausi on n vuotta. Vakuutus maksetaan hetkellä 0 ekvivalenssiperiaatteen mukaisella kertamaksulla P. Olkoon kaikilla $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
N_{01}(t) &= \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbb{1}(Z(s) = 1, Z(s-) = 0), \\
\Lambda_{01}(t) &= \int_0^t \mu_1(u)\, \mathbb{1}(Z(u) = 0)\, du, \\
M_{01}(t) &= N_{01}(t) - \Lambda_{01}(t), \\
M_{12}(t) &= N_{12}(t) - \Lambda_{12}(t).
\end{aligned}$$

Merkitään lisäksi

$$\begin{aligned}
g(t,u) &= e^{D(t)-D(u)} S(u), \quad u \geq t \geq 0, \\
V_1(t) &= \int_t^n \left[\mu_1(t_1) e^{-\int_t^{t_1} \mu_1(s)} \int_{t_1}^n g(t,u) \mu_2(u - t_1) e^{-\int_0^{u-t_1} \mu_2(s) ds} du \right] dt_1, \quad t \geq 0, \\
V_2(t,v) &= \int_t^n g(t,u) \mu_2(u - v) e^{-\int_{t-v}^{u-v} \mu_2(s) ds} du, \quad t \geq v \geq 0.
\end{aligned}$$

1. Funktiot V_1 ja V_2 toteuttavat differentiaaliyhtälöt

$$\begin{aligned}
V_1'(t) &= (\delta(t) + \mu_1(t)) V_1(t) - V_2(t,t), \quad t > 0, \\
\frac{\partial}{\partial t} V_2(t,v) &= (\delta(t) + \mu_2(t - v)) V_2(t,v) - \mu_2(t - v) S(t), \quad t > v > 0.
\end{aligned}$$

Todista näistä ensimmäinen.

2. Kaikilla $t \geq 0$ pätee

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{-D(s)} [V_1(s) - V_2(s,s)] d\Lambda_{01}(s) \\
= \quad & e^{-D(t)} V_1(t) \mathbb{1}(Z(t) = 0) + \int_0^t e^{-D(s)} V_1(s) dN_{01}(s) - P, \\
& \int_0^t e^{-D(s)} [V_2(s, \tau_1) - S(s)] d\Lambda_{12}(s) \\
= \quad & e^{-D(t)} V_2(t, \tau_1) \mathbb{1}(Z(t) = 1) + \int_0^t e^{-D(s)} V_2(s, \tau_1) dN_{12}(s) - \int_0^t e^{-D(s)} V_2(s,s) dN_{01}(s).
\end{aligned}$$

Todista tuloksista ensimmäinen.

3. Olkoon $t \geq 0$ ja

$$\Gamma(t) = P - \int_0^t e^{-D(s)} S(s) dN_{12}(s) - e^{-D(t)} V_1(t) \mathbb{1}(Z(t) = 0) - e^{-D(t)} V_2(t, \tau_1) \mathbb{1}(Z(t) = 1)$$

hetkeen t mennessä kertyneen ylijäämän nykyarvo. Osoita, että kaikilla $t \in [0, n]$,

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{-D(s)} (V_1(s) - V_2(s,s)) dM_{01}(s) + \int_0^t e^{-D(s)} (V_2(s, \tau_1) - S(s)) dM_{12}(s).$$

4. Osoita, että kaikilla $t \in [0, n]$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,(\Gamma(t)) &= \int_0^t e^{-2D(s)}(V_1(s) - V_2(s,s))^2 \mu_1(s)\mathbb{P}(Z(s)=0)ds \\ &+ \int_0^t e^{-2D(s)}\mathbb{E}\left((V_2(s,\tau_1) - S(s))^2 \mu_2(s-\tau_1)\mathbb{1}(Z(s)=1)\right)ds. \end{aligned}$$

5. Kolmen hengen kuolemanvaravakuutuksessa vakuutetun j jäljellä oleva elinaika on T_j, $j = 1, 2, 3$. Oletetaan, että elinajat ovat toisistaan riippumattomia ja että

$$\mathbb{P}(T_j \leq t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu_j(x_j+s)ds}, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

missä x_j on vakuutetun j ikä sopimuksen tekohetkellä. Olkoon korkoutuvuus δ. Oletetaan, että μ_1, μ_2, μ_3 ja δ ovat jatkuvia funktioita. Vakuutuskausi on n vuotta.

Korvaus maksetaan järjestyksessään toisen kuolintapauksen sattuessa. Jos viimeinen elossa oleva on vakuutettu j, on korvaussumma S_j. Määrää vakuutuksen ekvivalenssiperiaatteen mukainen nettokertamaksu. Perustelut pääpiirteissään.