Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 4, 17.4.2013

Olkoot τ_1 ja τ_2 riippumattomia kaikkialla positiivisia satunnaismuuttujia ja olkoon kaikilla $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\tau_j > x) = e^{-\int_0^x \mu_j(s)ds}, \quad j = 1, 2,$$

missä funktiot μ_1 ja μ_2 ovat ei-negatiivisia ja jatkuvia äärellisyysalueessaan. Olkoon

$$T_1 = \tau_1, \quad T_2 = \tau_1 + \tau_2 \quad \text{ja} \quad T_3 = +\infty.$$

Määritellään prosessi Z ehdosta

$$Z(t) = \mathbb{1}(T_1 \leq t) + \mathbb{1}(T_2 \leq t), \quad t \geq 0.$$

Olkoon $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ja $\mathcal{F}_t = \sigma\left(Z(s) \,|\, s \leq t\right)$.

1. Osoita vastaesimerkin avulla, että Z ei ole välttämättä Markov-prosessi.

2. Määritellään joukkoluokka $\mathcal{G}_t$ seuraavasti: $B \in \mathcal{G}_t$, jos ja vain jos $B \in \mathcal{F}_t$ ja

a) $B \cap \{Z(t) = 0\} = \{Z(t) = 0\}$ tai $\emptyset$,

b) $B \cap \{Z(t) = m\} = \{(T_1, \ldots, T_m) \in B_m, T_{m+1} > t\}$ eräälle $B_m \in \mathcal{B}^m \cap (0, t]^m$,

$m = 1, 2$, missä $\mathcal{B}^m$ tarkoittaa $\mathbb{R}^m$:n Borel-joukkoja. Osoita, että $\mathcal{G}_t$ on sigma-algebra.

3. Osoita, että $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t$.

4. Määritellään prosessi N_{12} ehdosta

$$N_{12}(t) = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbb{1}(Z(s) = 2, Z(s-) = 1), \quad t \geq 0.$$

Osoita, että prosessin kompensaattori Λ_{12} määräytyy ehdosta

$$\Lambda_{12}(t) = \int_0^t \mu_2(u - T_1)\, \mathbb{1}(T_1 \leq u < T_2)\, du, \quad t \geq 0.$$

5. Tulkitaan hyppyhetki tilasta 1 tilaan 2 vakuutustapahtumaksi. Yhtiö maksaa vakuuteulle summan $S(u)$, jos hyppyhetki on $u \in [0, n]$. Olkoon korkoutuvuus δ ja olkoon $D(t) = \int_0^t \delta(s)ds$ kaikilla $t \geq 0$. Vastuuvelka $V(t)$ hetkellä $t \in (0, n)$ määritellään tulevien korvausten nykyarvon ehdollisena odotusarvona sigma-algebran $\mathcal{F}_t$ suhteen (vakuutus oletetaan kertamaksuiseksi). Olkoon $g(u) = e^{D(t) - D(u)} S(u)$. Osoita, että

$$V(t) = \mathbb{1}(T_1 > t)\xi_1 + \mathbb{1}(T_1 \leq t, T_2 > t)\xi_2,$$

missä

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \int_t^n \left[\mu_1(t_1) e^{-\int_t^{t_1} \mu_1(s)} \int_{t_1}^n g(u) \mu_2(u - t_1) e^{-\int_0^{u - t_1} \mu_2(s)ds} du \right] dt_1, \\
\xi_2 &= \int_t^n g(u) \mu_2(u - T_1) e^{-\int_{t - T_1}^{u - T_1} \mu_2(s)ds} du.
\end{aligned}$$