Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 3, 27.3.2013

Olkoon τ satunnaismuuttuja, $\tau(\omega) \in \{1, 2, \ldots\}, \forall\omega$, ja olkoon

$$\mathbb{P}(\tau = k) = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Määritellään yhden hypyn prosessi $N = \{N(n)\,;\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ehdoista $N(0) = 0$ ja

$$N(n) = \mathbb{1}(\tau \leq n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Olkoon $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\Lambda(0) = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n &= \sigma\left(N(1), \ldots, N(n)\right), \\
\lambda(n) &= \mathbb{E}(N(n) - N(n-1) \,|\, \mathcal{F}_{n-1}), \\
\Lambda(n) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda(j),
\end{aligned}$$

$n = 1, 2, \ldots$. Tällöin Λ on N:n kompensaattori sigma-algebrajonon $(\mathcal{F}_n)$ suhteen,

1. Osoita, että $\mathcal{F}_n = \sigma\left(\{\tau = 1\}, \ldots, \{\tau = n\}, \{\tau > n\}\right)$.

2. Olkoon $B \in \mathcal{F}_n$. Osoita, että

$$B \cap \{\tau > n\} = \emptyset \quad \text{tai} \quad B \cap \{\tau > n\} = \{\tau > n\}.$$

3. Olkoon $B \in \mathcal{F}_{n-1}$. Osoita, että

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}(B)(N(n) - N(n-1))) = \begin{cases} 0, & \text{jos } B \cap \{\tau > n-1\} = \emptyset \\ p_n, & \text{jos } B \cap \{\tau > n-1\} = \{\tau > n-1\}. \end{cases}$$

4. Osoita, että

$$\lambda(n) \;=\; \begin{cases} \frac{p_n}{\sum_{j \geq n} p_j} \mathbb{1}(\tau \geq n), & \text{jos } \sum_{j \geq n} p_j > 0, \\ 0, & \text{jos } \sum_{j \geq n} p_j = 0, \end{cases}$$

ja että

$$\Lambda(n) \;=\; \sum_{m=1}^{\min(\tau, n)} \frac{p_m}{\sum_{j \geq m} p_j}.$$

5. Olkoon erityisesti $p_k = p(1-p)^{k-1}$, missä $p \in (0, 1)$. Osoita, että

$$\Lambda(n) = p \min(\tau, n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$