Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 2, 13.3.2013

Tehtävissä 1 ja 2 voidaan hyödyntää seuraavaa tulosta. Olkoon $a < b$ ja

$$\mathcal{P} = \{\emptyset\} \cup \{(\alpha, \beta]\,;\, a \leq \alpha < \beta \leq b\}.$$

Tällöin $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ on ns. π-systeemi). Tunnetusti $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}([a,b])$, missä $\mathcal{B}([a,b])$ tarkoittaa välin $[a,b]$ Borel-joukkoja. Olkoon joukkoluokka $\mathcal{L}$ sellainen, että

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}([a,b])$$

ja että

$$\begin{array}{ll} (i) & [a,b] \in \mathcal{L} \\ (ii) & B \in \mathcal{L} \Rightarrow B^c = [a,b] \setminus B \in \mathcal{L} \\ (iii) & B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{L}, \quad B_1, B_2, \ldots \text{ erillisiä} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{L} \end{array}$$

($\mathcal{L}$ on ns. λ-systeemi). Tällöin $\mathcal{L} = \mathcal{B}([a,b])$.

1. Olkoot $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ kasvavia, $\alpha, \beta \geq 0$, ja

$$g(t) = \alpha g_1(t) + \beta g_2(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

Osoita luentojen merkinnöin, että

$$m_g(B) = \alpha m_{g_1}(B) + \beta m_{g_2}(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}([a,b]).$$

2. Olkoon $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ kasvava ja $a < c < b$. Olkoon g_a funktion g rajoittuma joukkoon $[a,c]$ ja g_b joukkoon $[c,b]$ (esimerkiksi $g_a(t) = g(t)$ kaikilla $t \in [a,c]$). Tällöin

$$\begin{aligned} m_{g_a}(B) &= m_g(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}([a,c]) \\ m_{g_b}(B) &= m_g(B) - m_g(B \cap \{c\}), \quad \forall B \in \mathcal{B}([c,b]). \end{aligned}$$

Todista väitteistä jälkimmäinen.

3. (jatkoa) Olkoon $\int_a^b f(t)dg(t)$ äärellisenä olemassa. Osoita, että

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^c f(t)dg(t) + \int_c^b f(t)dg(t).$$

4. Täydennä lemman 1.1.2 todistus koskemaan tapausta, jossa $f \neq g$ ja jossa f ja g ovat yleisiä rajoitetusti heilahtelevia cadlag-funktioita.

5. Olkoon $f(0) = 0, f(1) = 1$ ja

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \mathbb{1}\left(t \in [(n+1)^{-1}, n^{-1})\right), \quad t \in (0,1).$$

Määrää $\int_0^1 f(t\text{-})\, df(t)$.