Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 1, 20.2.2013

Tehtävät perustuvat sisällöltään ja merkinnöiltään syksyn 2012 henkivakuutusmatematiikan kurssin kohtaan 10.

Olkoon yhtiön alkupääoma $U_0 > 0$. Vakuutuksia on N kappaletta, joista kunkin perusteella maksetaan hetkellä j summa S_j, mikäli vakuutettu kuolee välillä $[j-1, j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Summa S_j on erään osakkeen arvo korvaushetkellä. Oletetaan, että $\mathbb{P}(S_j > 0) = 1$ kaikilla $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ja että S_0 on deterministinen. Vakuutukset ovat loppuunmaksettuja eikä uusia vakuutuksia myönnetä. Kaikki vakuutetut ovat hetkellä nolla x-ikäisiä. Olkoon T_i vakuutetun i jäljellä oleva elinaika, $i = 1, \dots, N$. Oletetaan, että $T, T_1, \dots, T_N$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia.

Yhtiö sijoittaa aina kaiken varallisuutensa mainittuun osakkeeseen. Vastuuvelan diskonttaus tehdään odotettavissa olevien sijoitustoiminnan tuottojen mukaisesti. Siis

$$D_k = S_0/S_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Vastuuvelan muodostamisessa ehdollistava sigma-algebra hetkellä j on

$$\mathcal{F}_j = \sigma(\mathbb{1}(T_i \in [m-1, m)),\, i = 1, \dots, N,\, m = 1, \dots, j,\, S_1, \dots, S_j).$$

1. Olkoon U_j yhtiön hallussa oleva varallisuus hetkellä $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ (heti mahdollisten hetkellä j maksettavaksi tulevien kuolintapauskorvausten jälkeen). Osoita, että

$$U_j = \frac{S_j}{S_0} U_0 - S_j \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}(T_i < j).$$

2. (jatkoa) Olkoon $V(j)$ vastuuvelka hetkellä j (heti mahdollisten hetkellä j maksettavaksi tulevien kuolintapauskorvausten jälkeen). Osoita, että

$$V(j) = S_j\, {}_{n-j}q_{x+j} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}(T_i \geq j), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

3. (jatkoa) Olkoon $\tau = \inf\{j \in [0, n] \,|\, U_j < V(j)\}$ vararikkohetki sekä

$$Z_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(T_i < j) \qquad \text{ja} \qquad C_j = \frac{\frac{U_0}{S_0} - N\, {}_{n-j}q_{x+j}}{1 - {}_{n-j}q_{x+j}}.$$

Osoita, että

$$\tau = \inf\{j \in [0, n] | Z_j > C_j\}.$$

4. (jatkoa) Merkitään $\psi(U_0) = \mathbb{P}(\tau < \infty)$. Määrää $\psi(U_0)$ tapauksissa a) $U_0 \geq N S_0$ ja b) $U_0 < N\, {}_nq_x S_0$.

5. (jatkoa) Osoita henkivakuutusmatematiikan kurssin seurauksen 10.5 avulla, että yhtiö täyttää hetkellä 0 vakavaraisuusvaatimuksen $\psi(U_0) < \varepsilon$, kun $S_0 = 1$, $U_0 = 220$, $n = 10$, $N = 1\,000$, $\varepsilon = 0.01$ ja T on eksponenttijakautunut parametrina $a = 0.02$ ($\mathbb{E}(T) = 50$).