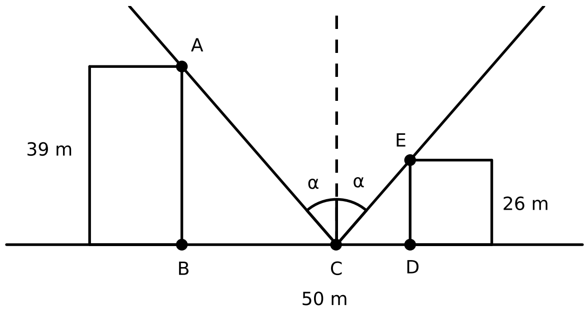
Geometria 2013
Harjoitus 9
Ratkaisuehdotuksia (Jokke Häsä)

Tämän kerran tehtävät olivat kevään 2013 matematiikan ylioppilaskokeista.

Tehtävä 1. (Lyhyen tehtävä 5.) Tähtiharrastaja katselee yöllisiä tähdenlentoja pihalla, joka sijaitsee kahden kerrostalon välissä kuvan mukaisesti. Talojen korkeudet ovat 39 m ja 26 m. Kuinka kaukana korkeammasta talosta molempiin suuntiin avautuu yhtä suuri kulma α maanpinnan tasosta katsottuna?



Ratkaisu. Kulmat BCA ja ECD ovat yhtä suuret, sillä molempien suuruus on $90° - \alpha$. Täten suorakulmaiset kolmiot ABC ja CDE ovat yhdenmuotoiset. Saadaan verranto

$$\frac{|BC|}{|BC| + |CD|} = \frac{|AB|}{|AB| + |DE|} \quad \text{eli} \quad \frac{|BC|}{50} = \frac{39}{39 + 26},$$

josta $|BC| = 50 \cdot 39/(39 + 26) = (50 \cdot 3 \cdot 13)/(5 \cdot 13) = 30$ (m).

Tehtävä 2. (Lyhyen tehtävä 9.) Neliön piiri on yhtä pitkä kuin ympyrän kehä.

a) Kuinka monta prosenttia neliön pinta-ala on pienempi kuin ympyrän pinta-ala?

b) Kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala on suurempi kuin neliön pinta-ala?

Anna vastaukset prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu. Jos neliön piiri on p, on neliön sivu $a = p/4$. Jos ympyrän kehä on p, on ympyrän säde puolestaan $r = p/(2\pi)$.

a) Neliön pinta-alan suhde ympyrän pinta-alaan on

$$\frac{a^2}{\pi r^2} = \frac{(p/4)^2}{\pi(p/(2\pi))^2} = \frac{p^2/16}{\pi p^2/(4\pi^2)} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}78540.$$

Neliön pinta-ala on siis 21,5 % pienempi kuin ympyrän.

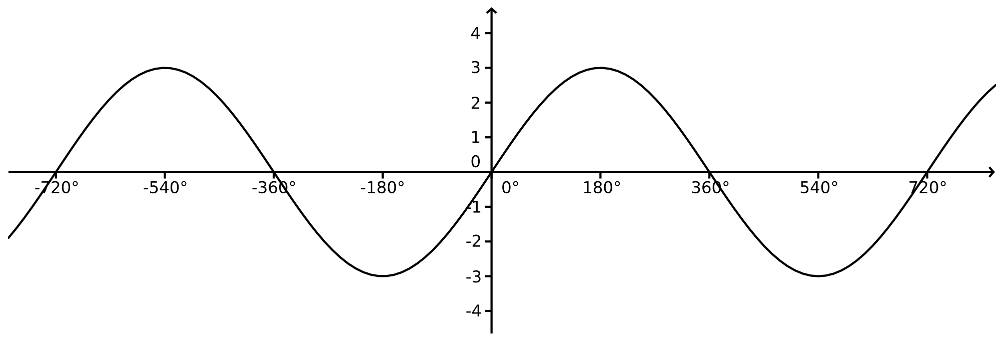
b) Ympyrän pinta-alan suhde neliön pinta-alaan on $4/\pi \approx 1{,}27324$. Ympyrän pinta-ala on siis 27,3 % suurempi kuin neliön.

Tehtävä 3. (Lyhyen tehtävä 15.) Alla on funktion $f(x) = A\sin(bx)$ kuvaaja välillä $x \in [-720°, 720°]$. Määritä kuvaajan perusteella

a) vakion A arvo

b) vakion b arvo

c) funktion f lyhin jakso L, jolle pätee $L > 0$ ja $f(x+L) = f(x)$ kaikilla x.

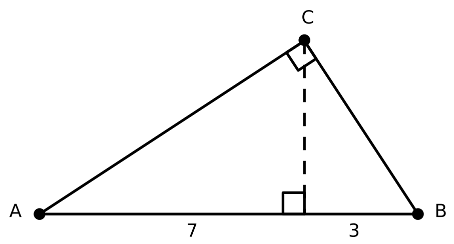


Ratkaisu. a) Sinifunktion arvot vaihtelevat välillä $[-1, 1]$, ja funktio f vaihtelee kuvan perusteella välillä $[-3, 3]$. Koska väli on laajentunut kolminkertaiseksi, voidaan päätellä, että $A = 3$.

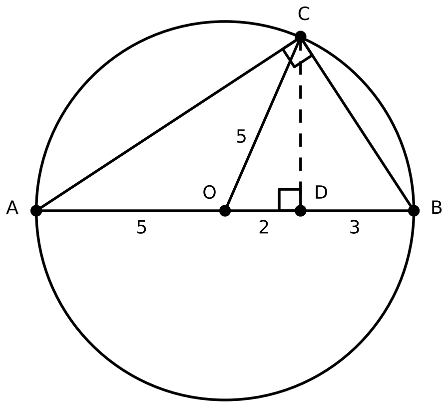
b) Vakio b kuvaa aallonpituutta. Sinifunktion ensimmäinen positiivinen nollakohta on 180°. Funktion f ensimmäinen positiivinen nollakohta on kuvan perusteella 360°. Jotta pätisi $bx = 180°$ muuttujan arvolla $x = 360°$, täytyy olla $b = 1/2$.

c) Kuvan perusteella funktion f arvot toistuvat täsmälleen samanlaisina aikaisintaan vakion 720° välein. Pätee siis $L = 720°$.

Tehtävä 4. (Pitkän tehtävä 4.) Laske oheisen kuvan suorakulmaisen kolmion ABC pinta-alan tarkka arvo.



Ratkaisu. (Erään opiskelijan ratkaisuidea.) Piirretään ympyrä pisteiden A, B ja C kautta. Koska kehäkulma C on suora, jänne AB on ympyrän halkaisija, joten ympyrän säde on 5. Keskipiste O sijaitsee janalla AB, ja sen etäisyys pisteestä D on 2. Pythagoraan lauseen mukaan $|DC| = \sqrt{|OC|^2 - |OD|^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$. Kolmion pinta-ala on siis $10 \cdot \sqrt{21}/2 = 5\sqrt{21}$.



Tehtävä 5. (Pitkän tehtävä 9.) Ratkaise yhtälö $\cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

Ratkaisu. Koska $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$, yhtälö saadaan muotoon

$$\cos(2x) = \cos(\pi - 3x).$$

Luvulla ja sen vastaluvulla on sama kosini, ja lisäksi kosinin arvot toistuvat luvun 2π välein. Voidaan siis päätellä, että

$$2x = \pi - 3x + 2\pi n \quad \text{tai} \quad 2x = 3x - \pi + 2\pi n \quad \text{jollain } n \in \mathbb{Z}.$$

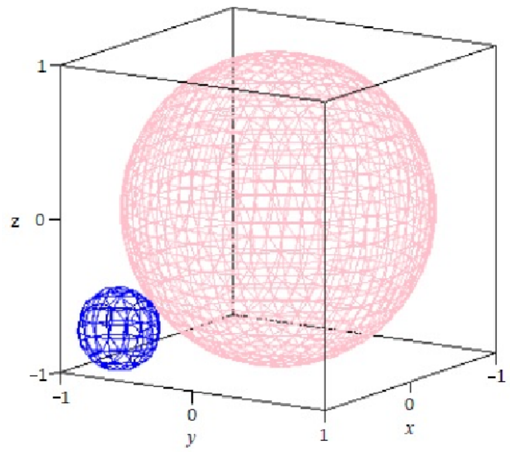
Tästä saadaan

$$5x = \pi + 2\pi n \quad \text{tai} \quad x = \pi + 2\pi n \quad \text{jollain } n \in \mathbb{Z},$$

ja edelleen

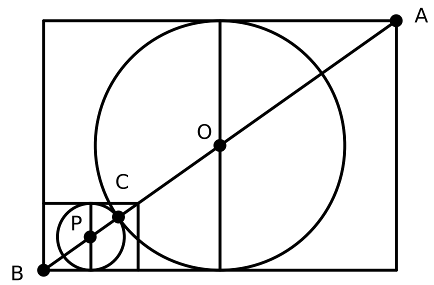
$$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5} \quad \text{tai} \quad x = \pi + 2\pi n \quad \text{jollain } n \in \mathbb{Z},$$

Tehtävä 6. (Pitkän tehtävä 10.) Oheisen kuution särmän pituus on 2. Sen sisällä on vaaleanpunainen pallo, joka sivuaa jokaista kuution tahkoa. Kuution yhdessä kulmassa on pienempi sininen pallo, joka sivuaa suurta palloa ja kolmea kuution tahkoa kuvion mukaisesti. Laske sinisen pallon säteen tarkka arvo.



Ratkaisu. Olkoon suuremman pallon säde R ja pienemmän r. Koska suuren kuution sivu on 2, nähdään, että $R = 1$. Kuvitellaan apukuvioksi myös pienemmän pallon ympärille kuutio, jonka jokainen tahko sivuaa pientä palloa ja jonka kolme tahkoa ovat suuremman kuution tahkoilla. Suurempi ja pienempi sommitelma – eli kuutioiden sisälle piirretyt pallot – ovat yhdenmuotoisia. Etsitään niiden välinen mittakaava k.

Tarkastellaan sommitelmaa vinosti erään sivusärmän suunnasta. Piste C, jossa pallot koskettavat, jakaa suuremman kuution avaruuslävistäjän kahteen osaan. Pidemmän osan pituus on puolet avaruuslävistäjän pituudesta (jana AO) ynnä suuremman pallon säde (jana OC). Koska avaruuslävistäjän kokonaispituus on $2\sqrt{3}$ ja $R = 1$, janan AC pituudeksi tulee $\sqrt{3}+1$. Janan CB pituudeksi jää siis $2\sqrt{3} - (\sqrt{3}+1) = \sqrt{3} - 1$.



Kuvioita tutkimalla huomataan, että pienemmässä kuutiossa jana BC on suuremman kuution janan AC vastinosa, joten kuvioiden mittakaava voidaan laskea niistä:

$$k = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

Nyt pienemmän pallon säde on suuremman pallon säde jaettuna mittakaavalla eli

$$\frac{R}{k} = \frac{1}{k} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = 2-\sqrt{3}.$$

Tehtävien 7 ja 8 (pitkän tehtävä 15) ratkaisut ilmestyvät harjoituksen 11 ratkaisujen yhteydessä.