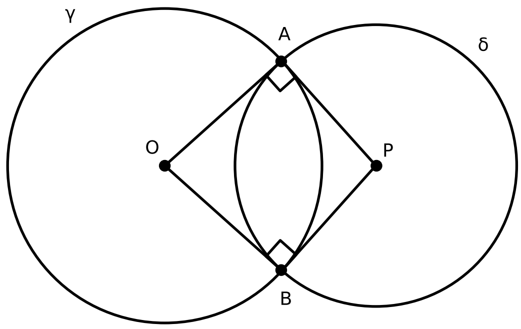
Geometria 2013
Harjoitus 8
Ratkaisuehdotuksia (Jokke Häsä)

Tehtävä 1. Oletetaan, että ympyröiden γ ja δ keskipisteet ovat O ja P. Oletetaan, että ympyrät leikkaavat toisensa kohtisuoraan pisteissä A ja B. Laske kulmien $\measuredangle AOB$ ja $\measuredangle APB$ summa.

Ratkaisu. Nelikulmion $OAPB$ kulmien summa on $360°$, joten

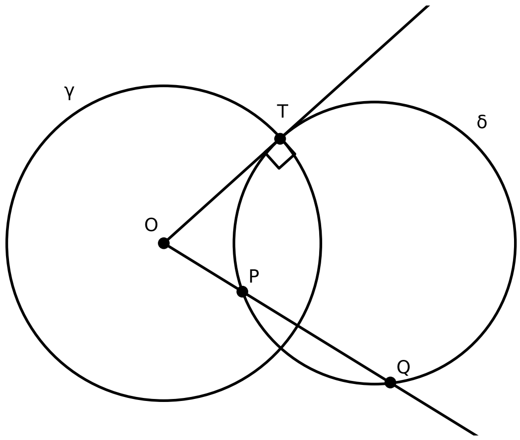
$$\measuredangle AOB + \measuredangle APB = 360° - (\measuredangle OAP + \measuredangle OBP) = 360° - 180° = 180°.$$



Tehtävä 2. Oletetaan, että ympyrä δ leikkaa ympyrää γ kohtisuoraan. Määritä ympyrän δ kuva inversiossa ympyrän γ suhteen. Miten yksittäiset ympyrän δ pisteet kuvautuvat?

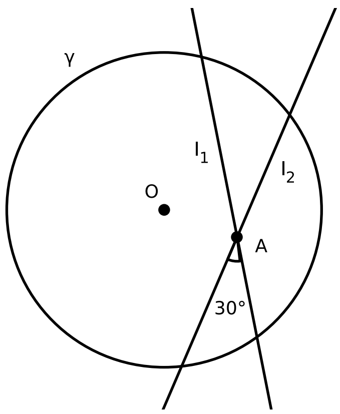
Ratkaisu. Ratkaisu löytyy Greenbergin kirjan proposition 7.5 todistuksen jälkiosasta. Merkitään ympyrän γ sädettä r ja keskipistettä O. Tutkitaan jotakin pistettä P ympyrän δ kehällä. Sen kuva inversiossa on puolisuoralla OP. Olkoon Q toinen piste, jossa OP leikkaa ympyrän δ. (Tällainen on olemassa, jos OP ei ole δ:n tangentti eli P ei ole ympyröiden leikkauspiste.) Olkoon lisäksi T ympyröiden γ ja δ leikkauspiste.

Nyt pisteen O potenssi ympyrän δ suhteen on $|OP||OQ|$, mutta koska ympyrät leikkaavat toisensa kohtisuoraan, potenssi on myös $|OT|^2 = r^2$. Nyt siis $|OP||OQ| = r^2$, joten Q on pisteen P kuva inversiossa ympyrän γ suhteen. Ympyrä δ kuvautuu siis inversiossa itselleen niin, että γ:n sisäpuolelle jäävä osa kääntyy γ:n ulkopuolelle ja päinvastoin.



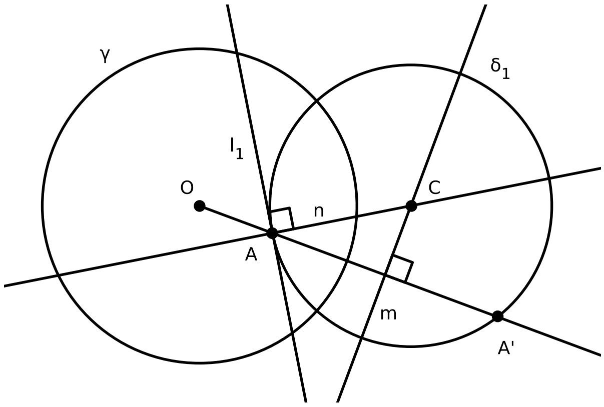
Tehtävä 3. Piirrä ympyrää γ vastaavaan Poincarén kiekkomalliin $30°$ kulma, jonka kärki ei ole ympyrän γ keskipiste.

Ratkaisu. Kulman piirtäminen Poincarén kiekkomalliin on käsitelty Greenbergin kirjan sivuilla 204–205. Poincarén mallissa kulman (jonka kärki ei ole kiekon keskipisteessä) kylkien on oltava ympyränkaaria, jotka leikkaavat ympyrää γ kohtisuoraan. Valitaan kiekolta jokin keskipisteestä poikkeava piste A ja piirretään sen kautta kaksi (euklidista) suoraa l_1 ja l_2, jotka leikkaavat toisensa $30°$ kulmassa. (Tämä voidaan tehdä esimerkiksi puolittamalla yksi tasasivuisen kolmion kulmista.) Nyt on vain osattava piirtää pisteen A kautta ympyrät, joilla on tangentteina piirretyt suorat ja jotka leikkaavat ympyrää γ kohtisuoraan.

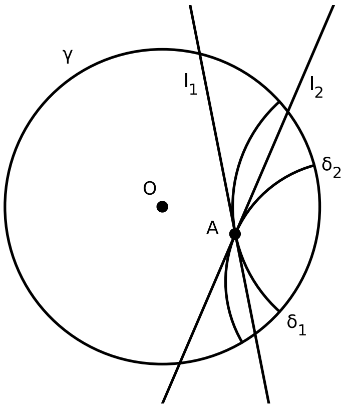


Etsitään ensin ympyrä δ_1, joka sivuaa suoraa l_1 pisteessä A ja on kohtisuorassa ympyrää γ vastaan. Greenbergin proposition 7.5 nojalla (edellisen tehtävän toinen suunta) ympyrän δ_1 on kuljettava myös sellaisen pisteen A' kautta, joka on A:n kuva inversiossa γ:n suhteen. (Pisteen kuva inversiossa voidaan piirtää proposition 7.2 avulla.) Tällöin δ_1:n keskipisteen on oltava pisteet A ja A' yhdistävän jänteen keskinormaalilla m. (Jos nimittäin ajatellaan ympyrän sisään piirrettyä kolmiota, jonka eräs sivu on AA', on ympyrän keskipiste jokaisen kolmion sivun keskinormaalilla.)

Toisaalta, koska suoran l_1 on oltava tangentti ympyrälle δ_1 pisteessä A, täytyy δ_1:n keskipisteen olla pisteeseen A suoralle l_1 piirretyllä kohtisuoralla n. Ympyrän δ_1 keskipiste C on siis suorien m ja n leikkauspiste. Säteenä on jana CA.



Vastaavasti voidaan löytää ympyrä δ_2. Ympyrät δ_1 ja δ_2 leikkaavat toisensa $30°$ kulmassa pisteessä A.



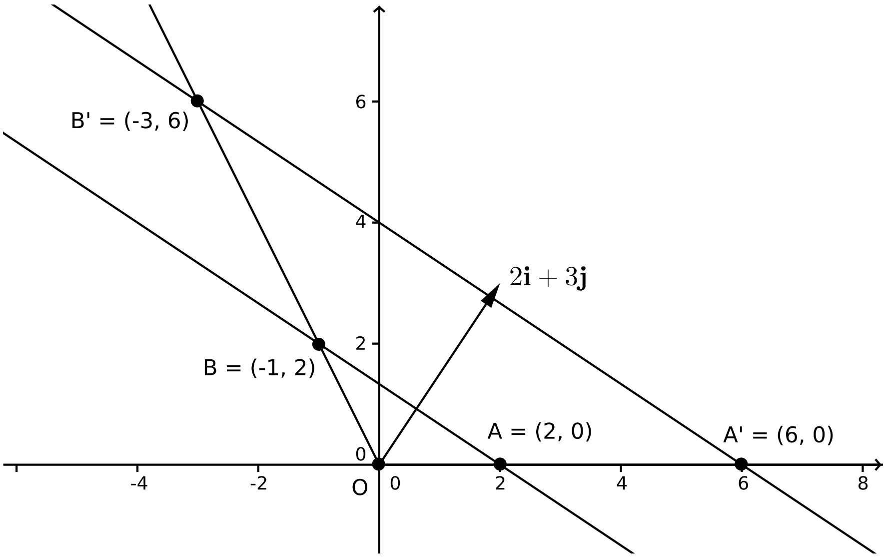
Tehtävä 4. Tarkastellaan homotetiaa, jonka homotetiakeskus on origo ja homotetiasuhde on 3. Määritä suoran $2x + 3y = 4$ kuvajoukon yhtälö.

Ratkaisu. Koska homotetia säilyttää kuvioiden muodon, suora kuvautuu suoraksi. On siis vain etsittävä kahden suoran pisteen kuvat, jotta kuvasuora voidaan määrittää. Valitaan esimerkiksi pisteet $A = (2, 0)$ ja $B = (-1, 2)$. Kuvatussa homotetiassa näiden kuvat ovat

$$A' = (3 \cdot 2, 3 \cdot 0) = (6, 0) \quad \text{ja} \quad B' = (3 \cdot (-1), 3 \cdot 2) = (-3, 6).$$

Kuvapisteiden kautta kulkevan suoran yhtälö on $2x + 3y = 12$.

Lisähuomio. Suoran ja sen kuvan yhtälöiden samankaltainen muoto johtuu siitä, että kyseessä on suoran yhtälön normaalimuoto. Kertoimet 2 ja 3 kuvaavat sitä, että suora on kohtisuorassa vektoria $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ vastaan, ja homotetia ei muuta tätä (homotetia ei muuta mitään kulmia). Toisaalta yhtälön oikealla puolella oleva vakio kuvaa suoran etäisyyttä origosta, ja homotetiassa tämä etäisyys luonnollisesti kolminkertaistuu.

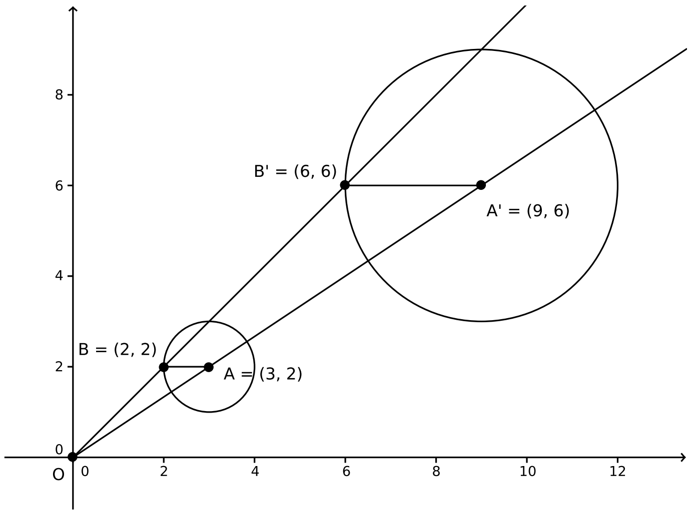


Tehtävä 5. Tarkastellaan samaa homotetiaa kuin tehtävässä 4. Määritä ympyrän $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ kuvajoukon yhtälö.

Ratkaisu. Ympyrä säilyy homotetiassa ympyränä, koska homotetia on yhdenmuotoisuuskuvaus. Riittää vain löytää kuvaympyrän keskipiste sekä säde. Alkuperäisen ympyrän keskipiste on $A = (3, 2)$. Säteen kuvautumisen selvittämiseksi valitaan jokin piste ympyrän kehältä, esimerkiksi $B = (2, 2)$. Nämä pisteet kuvautuvat homotetiassa pisteille

$$A' = (3 \cdot 3, 3 \cdot 2) = (9, 6) \quad \text{ja} \quad B' = (3 \cdot 2, 3 \cdot 2) = (6, 6).$$

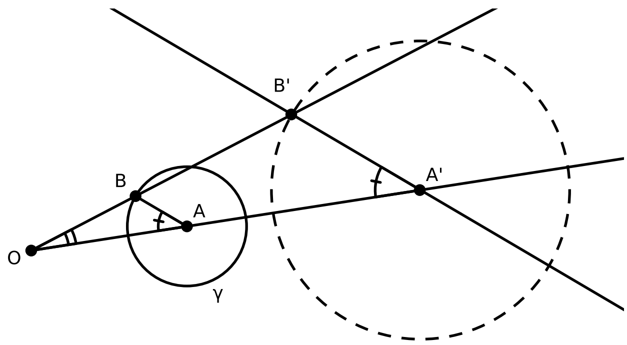
Kuvaympyrän keskipiste on siis A'. Lisäksi kolmiot OAB ja $OA'B'$ ovat yhdenmuotoiset, joten etäisyys $|A'B'|$ on kuvaympyrän säde. Täten kuvaympyrän yhtälöksi tulee lopulta $(x-9)^2 + (y-6)^2 = 9$.



Lisähuomio. Mistä oikeastaan tiedetään, että homotetia kuvaa ympyrän ympyräksi ja vieläpä niin, että keskipiste kuvautuu keskipisteelle? Yllä vedottiin siihen, että homotetia on yhdenmuotoisuuskuvaus, mutta käydään asia vielä esimerkin vuoksi tarkemmin läpi.

Tarkastellaan ympyrää γ, jonka keskipiste on A ja säde r, sekä homotetiaa, jonka keskus on O ja homotetiasuhde $k > 0$. Olkoon A' keskipisteen A kuva kyseisessä homotetiassa. Osoitetaan ensin, että jokaisen ympyrän γ pisteen kuvapiste on yhtä kaukana pisteestä A', ja että tämä etäisyys on kr.

Olkoon B jokin ympyrän γ piste, joka ei ole suoralla OA. Piirretään pisteen A' kautta janan AB kanssa yhdensuuntainen suora. Olkoon B' piste, jossa tämä suora leikkaa puolisuoraa OB. Koska $\measuredangle AOB = \measuredangle A'OB'$ ja yhdensuuntaisuuden vuoksi myös $\measuredangle OAB = \measuredangle OA'B'$, kolmiot OAB ja $OA'B'$ ovat yhdenmuotoisia. Täten $|A'B'|/|AB| = |OB'|/|OB| = |OA'|/|OA| = k$, josta saadaan ensinnäkin $|OB'| = k|OB|$, eli B' on pisteen B kuva homotetiassa, ja toisekseen $|A'B'| = k|AB| = kr$.

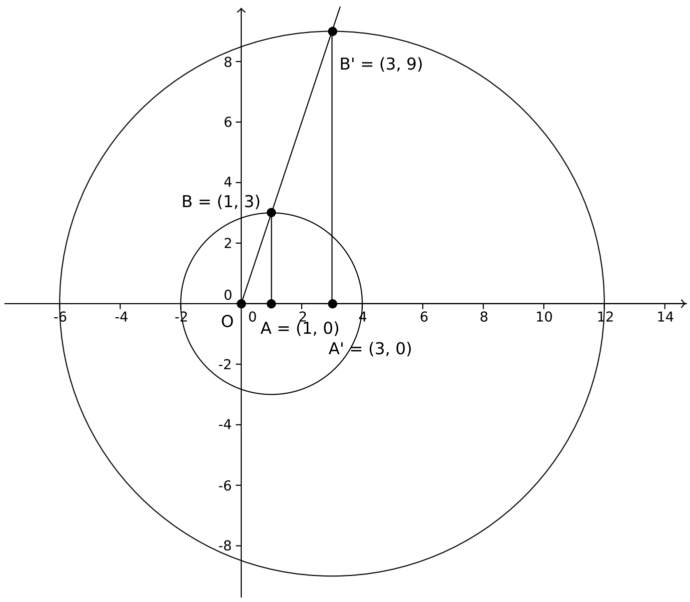


Ympyrän γ ja suoran OA leikkauspisteet voidaan käsitellä samalla tavalla. Jokainen ympyrän γ piste kuvautuu siis ympyrälle γ', jonka keskipiste on A' ja säde kr. Näytetään vielä, että jokainen kyseisen ympyrän piste on jonkin ympyrän γ pisteen kuva (eli kuvaus on surjektiivinen ympyrältä γ ympyrälle γ'). Olkoon sitä varten C jokin ympyrän γ'

piste. Samalla tavalla kuin edellä voidaan osoittaa, että pisteen C kuva C' sellaisessa homotetiassa, jonka keskus on O ja homotetiasuhde $1/k$, on ympyrällä γ. Lisäksi tämä piste C' kuvautuu alkuperäisessä homotetiassa takaisin pisteelle C. Siispä piste C on erään pisteen C' kuva alkuperäisessä homotetiassa.

Tehtävä 6. Tarkastellaan samaa homotetiaa kuin tehtävässä 4. Määritä ympyrän $(x-1)^2 + y^2 = 9$ kuvajoukon yhtälö.

Ratkaisu. Tehtävä voidaan ratkaista aivan samalla tavalla kuin edellinenkin tehtävä. Kuvaympyrän yhtälöksi tulee $(x-3)^2 + y^2 = 81$.



Tehtävä 7. Ratkaise yhtälö $\sin 2x = \cos x$.

Ratkaisu. Käytetään apuna kaavaa $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Tämän avulla ratkaistava yhtälö saadaan muotoon

$$2 \sin x \cos x = \cos x.$$

Yhtälö toteutuu, jos $\cos x = 0$. Tämä johtaa ratkaisuihin $x = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Jos taas $\cos x \neq 0$, voidaan termillä $\cos x$ jakaa puolittain, jolloin yhtälöstä tulee

$$2 \sin x = 1 \quad \text{eli} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

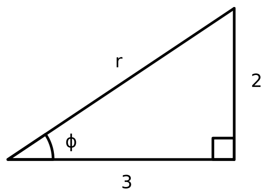
Viimeinen yhtälö on tosi täsmälleen silloin, kun $x = \pi/6 + n \cdot 2\pi$ tai $x = 5\pi/6 + n \cdot 2\pi$ jollain $n \in \mathbb{Z}$. Lopulliseksi ratkaisuksi saadaan siis

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{tai} \quad x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{jollain } n \in \mathbb{Z}.$$

Tehtävä 8. Ratkaise yhtälö $2\sin x + 3\cos x = 1$ etsimällä ensin r ja ϕ, joille $2 = r\sin\phi$ ja $3 = r\cos\phi$.

Ratkaisu. Etsityt r ja ϕ löytyvät suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateetit ovat 2 ja 3 ja edellisen vastainen kulma on ϕ. Jos nimittäin hypotenuusan pituus on r, niin $\sin\phi = 2/r$ ja $\cos\phi = 3/r$. Arvoiksi saadaan

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \quad \text{ja} \quad \phi = \arctan\frac{2}{3} \approx 0{,}588.$$



Sijoitettaessa $2 = r\sin\phi$ ja $3 = r\cos\phi$ ratkaistava yhtälö tulee muotoon

$$r\sin\phi\sin x + r\cos\phi\cos x = 1.$$

Jaetaan puolittain luvulla r ja käytetään kaavaa $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$\cos(\phi - x) = \frac{1}{r}.$$

Kosini on parillinen funktio, joka siis saa luvulla ja vastaluvulla saman arvon. Lisäksi arvot toistuvat jakson 2π välein. Näin ollen

$$\phi - x = \arccos\frac{1}{r} + n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x - \phi = \arccos\frac{1}{r} + n\cdot 2\pi,$$

ja lopullinen vastaus voidaan antaa muodossa

$$x = \phi - \arccos\frac{1}{r} + n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \phi + \arccos\frac{1}{r} + n\cdot 2\pi.$$