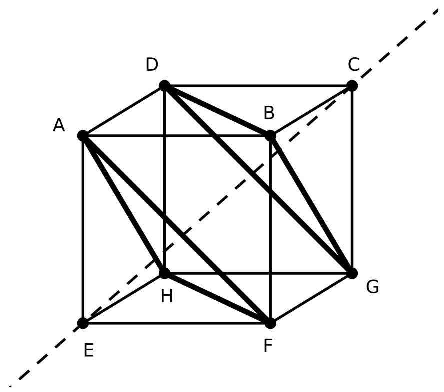
Geometria 2013
Harjoitus 7
Ratkaisuehdotuksia (Jokke Häsä)

Tehtävä 1. Kuution särmä on a. Kaksi eri tasoa on kohtisuorassa (samaa) avaruuslävistäjää vasten, Molemmat kulkevat kuution kolmen kärjen kautta. Laske kuution tasojen väliin jäävän osan tilavuus.

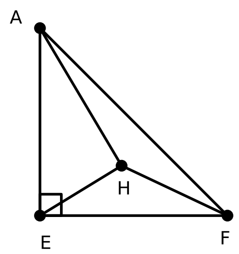
Ratkaisu. Tarkastellaan yhtä tasoista. Se rajaa kuutiosta pyramidin muotoisen kappaleen. Kyseisen pyramidin pohja on tasasivuinen kolmio, jonka kärjet ovat ne kuution kolme kärkeä, joiden kautta taso kulkee. Huippuna puolestaan on se kärki, jonka kautta avaruuslävistäjä kulkee.



Kaksi tasoa rajaavat samanlaiset kappaleet kuution molemmista kärjistä. Väliin jäävän osan tilavuus saadaan vähentämällä kuution tilavuudesta kaksi kertaa kappaleen tilavuus. Kappaleen tilavuus saadaan puolestaan pyramidin (kartion) tilavuuden kaavalla, kun tunnetaan pohjan pinta-ala ja korkeus.

Pyramidin tilavuutta laskettaessa pohjaksi kannattaa valita yksi niistä sivuista, jotka ovat alkuperäisen kuution tahkolla. Tällöin pohjan ala on puolet tahkon alasta eli $a^2/2$ ja korkeusjanana toimii kuution särmä. Tilavuudeksi tulee siis

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{1}{6} a^3.$$



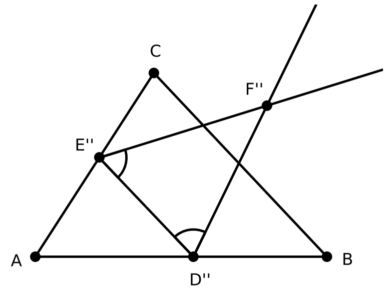
Kun alkuperäisestä kuutiosta vähennetään kahden pyramidin tilavuus, saadaan kysytyn kappaleen tilavuus. Se on siis $\frac{2}{3}a^3$.

Lisähuomio. Pyramidien väliin jäävä kappale on muodoltaan *antiprisma*. Myös oktaedri on antiprisma. (Itse asiassa tehtävän kappale on epäsäännöllinen oktaedri.) Antiprismoista on lisätietoa Wikipediassa: `http://en.wikipedia.org/wiki/Antiprism`.

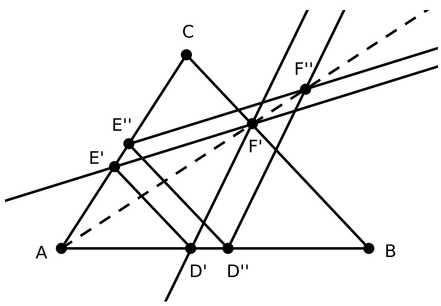
Tehtävä 2. Oletetaan, että ABC ja DEF ovat teräväkulmaisia kolmioita. Miten harpilla ja viivaimella voidaan piirtää sellainen kolmio $D'E'F'$, joka on yhdenmuotoinen kolmion DEF kanssa ja jonka kärjet ovat kolmion ABC sivuilla?

Ratkaisu. Käytetään apuna homotetiaa. Otetaan homotetiakeskukseksi kolmion kärki A, jolloin sivujen AB ja AC suuntaisilla suorilla olevat pisteet kuvautuvat homotetiassa samoille suorille.

Valitaan sivuilta AB ja AC aluksi kaksi mielivaltaista pistettä ja yhdistetään ne uuden kolmion sivuksi $D''E''$. Täydennetään kuvio siirtämällä kulmat FDE ja DEF kolmiosta DEF niin, että muodostuu sen kanssa yhdenmuotoinen kolmio $D''E''F''$. (Huom. Pisteet D'' ja E'' on valittava siten, että kyljet $D''F''$ ja $E''F''$ tulevat kulman CAB sisäpuolelle. Tämä on aina mahdollista, koska kolmio DEF on teräväkulmainen. Voidaan esimerkiksi valita pisteet niin, että sivut $D''E''$ ja BC tulevat yhdensuuntaisiksi. Tällöin kulmat $AE''D''$ ja $D''E''F''$ ovat molemmat teräviä, joten $E''F''$ on kulman CAB sisäpuolella, ja sama pätee kyljelle $D''F''$.)



Kulma F'' ei nyt ole välttämättä kolmion ABC sivulla. Piirretään homotetiakeskuksesta A säde kulman F'' kautta ja katsotaan, missä se leikkaa vastakkaista sivua BC. Tähän tulee piste F'. Piirretään lopuksi pisteen F' kautta sivujen $E''F''$ ja $D''F''$ kanssa yhdensuuntaiset suorat. Pisteet, joissa nämä suorat leikkaavat sivuja AB ja AC, ovat uuden kolmion kärjet D' ja E'. Nyt kolmio $D'E'F'$ on yhdenmuotoinen kolmion DEF kanssa.



Tehtävä 3. Miten harpilla ja viivaimella voidaan piirtää säännöllinen 10-kulmio?

Ratkaisu. Väisälän kirjan 116 §:n lauseessa selitetään, miten ympyrän sisään voidaan piirtää säännöllinen 10-kulmio. Ensin on jaettava säde r jatkuvaan suhteeseen (kultainen leikkaus). Tämän konstruointi on esitetty 118 §:n tehtävässä 1. Jaetun janan suurempi osa s on 10-kulmion sivun pituus, jolloin kyseinen kulmio voidaan piirtää erottamalla r-säteisen ympyrän kaarelta harpilla toistuvasti etäisyys s.

Tehtävä 4. Yhdistetään tetraedrin vastakkaisten särmien keskipisteet. Osoita, että kaikki yhdysjanat leikkaavat samassa pisteessä, joka on jokaisen yhdysjanan keskipiste. (Emme oleta, että tetraedri on säännöllinen.)

Todistus. Käytetään tehtävässä vektoreita. Kun tarkastellaan yhdestä kiinnitetystä tetraedrin kärjestä lähteviä vektoreita, kutakin kuvion pistettä vastaa yksi yhteen jonkin vektorin päätepiste. Tämä kävisi selväksi, jos valittaisiin koordinaatisto siten, että yksi nurkista olisi origossa, jolloin jokaista pistettä vastaisi pisteen paikkavektori. Koordinaatistoa ei kuitenkaan tarvita tehtävässä mihinkään, joten yritetään pärjätä ilman.

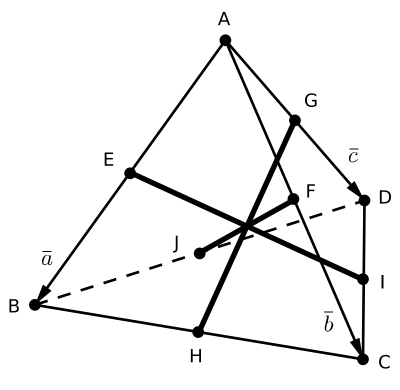
Merkitään tetraedri kärkiä A, B, C ja D. Koska tetraedri on kolmiulotteinen kappale, jokaista pistettä vastaava vektori voidaan ilmaista joidenkin kolmen ennalta valitun kantavektorin avulla. Valitaan kantavektoreiksi nurkasta A lähtevät särmävektorit

$$\bar{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \bar{b} = \overrightarrow{AC} \quad \text{ja} \quad \bar{c} = \overrightarrow{AD}.$$

Tetraedrillä on 6 särmää. Merkitään särmien keskipisteitä seuraavan taulukon mukaisesti kirjamilla $E, \dots, J$. Taulukkoon on merkitty myös särmien esitykset virittäjävektorien $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ avulla.

särmä :	AB	AC	AD	BC	CD	DB
keskipiste :	E	F	G	H	I	J
virittäjäesitys :	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{b}-\bar{a}$	$\bar{c}-\bar{b}$	$\bar{a}-\bar{c}$

Yhdysjanoja vastaavat nyt vektorit $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{FJ}$ ja $\overrightarrow{GH}$. Merkitään näiden keskipisteitä järjestyksessä X, Y ja Z.



On siis osoitettava, että yhdysjanojen keskipisteet yhtyvät. Tehdään tämä kirjoittamalla vektorit $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{AY}$ ja $\overrightarrow{AZ}$ virittäjävektorien $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ avulla. Saadaan ensinnäkin

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}) \\ &= \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\bar{a} + \bar{b} + \frac{1}{2}(\bar{c} - \bar{b})\right) = \frac{1}{4}\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{1}{4}\bar{c}.\end{aligned}$$

Samalla tavoin saadaan

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AY} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}) \\ &= \frac{1}{2}\bar{b} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\bar{b} + \bar{c} + \frac{1}{2}(\bar{a} - \bar{c})\right) = \frac{1}{4}\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{1}{4}\bar{c}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AZ} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \\ &= \frac{1}{2}\bar{c} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\bar{c} + \bar{a} + \frac{1}{2}(\bar{b} - \bar{a})\right) = \frac{1}{4}\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{1}{4}\bar{c}.\end{aligned}$$

Nähdään, että vektorit $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{AY}$ ja $\overrightarrow{AZ}$ ovat itse asiassa sama vektori. Koska kaikilla on sama lähtöpiste, myös päätepisteet ovat samat. Täten pisteet X, Y ja Z yhtyvät. $\square$

Tehtävä 5. Tarkastellaan ympyrää γ, jonka keskipiste on O ja säde r. Inversio tämän ympyrän kuvaa pisteen A sellaiselle puolisuoran OA pisteelle A', että $|OA||OA'| = r^2$. Miten inversio ympyrän $x^2+y^2 = 1$ suhteen kuvaa suoran $x = 0$ pisteen $(0, y)$, jos $y \neq 0$?

Ratkaisu. Tehtävän piste $A = (0, y)$ on y-akselilla origon yläpuolella, joten inversio origokeskeisen ympyrän suhteen kuvaa sen positiiviselle y-akselille (määritelmän puolisuora OA). Täytyy vain määrittää kuvapisteen etäisyys $|OA'|$. Tämä saadaan suoraan määritelmän kaavasta $|OA||OA'| = r^2 = 1$, jolloin $|OA'| = 1/|OA| = 1/y$. Kuvapisteeksi tulee siis $A' = (0, 1/y)$. (Kuva jäljempänä.)

Tehtävä 6. Tarkastellaan edelleen inversiota ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ suhteen. Määritä pisteen $(x, 2)$ kuva.

Ratkaisu. Piste $A = (x, 2)$ sijaitsee origosta lähtevällä puolisuoralla, jota kuvaa suuntavektori $\overrightarrow{OA} = x\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Kuvapiste A' sijaitsee samalla puolisuoralla, joten sen paikkavektori on muotoa $t\overrightarrow{OA}$, missä $t \geq 0$. Kerroin t määräytyy ehdosta $|OA||OA'| = 1$, jonka mukaan

$$1 = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OA'}| = t|\overrightarrow{OA}|^2 = t(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}) = t(x^2 + 2^2).$$

Saadaan siis, että $t = 1/(x^2 + 4)$, jolloin kuvapiste puolestaan on

$$A' = \left(\frac{x}{x^2 + 4}, \frac{2}{x^2 + 4}\right).$$

Tehtävä 7. Tutkitaan pisteen $(x, 2)$ kuvapistettä edellisen tehtävän inversiossa.

(a) Laske tämän kuvapisteen etäisyys pisteestä $(0, 1/4)$.

(b) Mikä on suoran $y = 2$ kuvajoukko tarkasteltavassa inversiossa.

Ratkaisu. (a) Lasketaan etäisyys suoraan Pythagoraan kaavaa käyttäen. Ensinnäkin

$$\frac{2}{x^2+4} - \frac{1}{4} = \frac{4-x^2}{4(x^2+4)}.$$

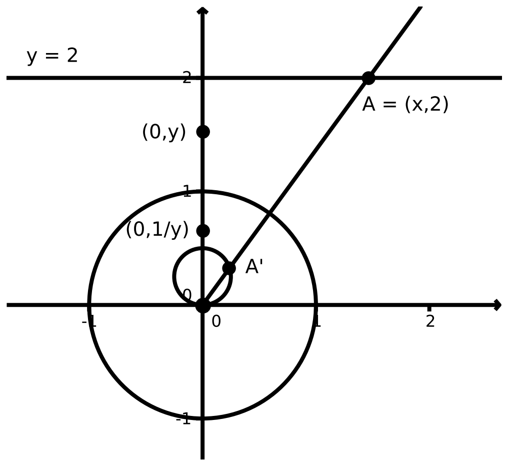
Etäisyydeksi tulee siis

$$\sqrt{\left(\frac{x}{x^2+4} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{x^2+4} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{(x^2+4)^2} + \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{16(x^2+4)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{x^4 + 8x^2 + 16}{16(x^2+4)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2+4)^2}{16(x^2+4)^2}} = \frac{1}{4}.$$

(b) Jokainen suoran $y = 2$ piste on muotoa $(x, 2)$, joten (a)-kohdan mukaan jokaisen kuvajoukon pisteen etäisyys pisteestä $(0, 1/4)$ on $1/4$. Kuvajoukko sijaitsee siis ympyrällä δ, jonka keskipiste on $(0, 1/4)$ ja säde $1/4$. Kaikki tämän ympyrän pisteet eivät kuitenkaan ole kuvapisteitä (eli inversiokuvaus ei ole surjektio kyseiselle ympyrälle).

Tutkitaan edellisessä tehtävässä johdettua kuvapisteen $A' = (x', y')$ muotoa hieman tarkemmin. Kuvapisteen y'-komponentti on muotoa $2/(x^2 + 4)$, ja helposti nähdään, että mikäli y' on puoliavoimella välillä $(0, 1/2]$, voidaan aina valita sellainen x, että $2/(x^2 + 4) = y'$. Lisäksi x voi olla positiivinen tai negatiivinen, ellei $y' = 1/2$, jolloin $x = 0$.

Jos nyt mietitään, mitkä ympyrän δ pisteet voivat olla kuvapisteitä, havaitaan, että kyseeseen tulevat kaikki ympyrän pisteet origoa lukuunottamatta. Kuvapisteen y'-komponentti ei nimittäin voi saada arvoa 0, mutta kaikki muut ympyrällä esiintyvät arvot ovat mahdollisia. Kuvajoukko on siis punkteerattu ympyrä $\delta \setminus \{(0, 0)\}$.



Tehtävä 8. Tarkastellaan edelleen inversiota ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ suhteen. Määritä suoran $x = 1$ kuva tässä inversiossa. Kannattaa tarkastella kuvapisteiden etäisyyttä pisteestä $(1/2, 0)$.

Ratkaisu. Edetään samalla tavalla kuin kolmessa edellisessä tehtävässä. Jokainen suoran $x = 1$ piste A on muotoa $(1, y)$. Tällainen kuvautuu inversiossa pisteelle A', jonka paikkavektori on $t(\mathbf{i} + y\mathbf{j})$, missä $t \geq 0$. Kerroin t saadaan ratkaistua yhtälöstä

$$1 = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OA'}| = t(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}) = t(1 + y^2),$$

josta $t = 1/(1 + y^2)$. Kuvapiste on siis muotoa

$$A' = \left(\frac{1}{1+y^2}, \frac{y}{1+y^2}\right).$$

Lasketaan sitten mielivaltaisen kuvapisteen etäisyys pisteestä $(1/2, 0)$. Ensinnäkin

$$\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{2} = \frac{1-y^2}{2(1+y^2)}.$$

Etäisyydeksi tulee

$$\sqrt{\left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+y^2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{y^4 - 2y^2 + 1}{4(1+y^2)^2} + \frac{y^2}{(1+y^2)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{y^4 + 2y^2 + 1}{4(1+y^2)^2}} = \sqrt{\frac{(y^2+1)^2}{4(1+y^2)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Koska edellä laskettu etäisyys on vakio, voidaan päätellä, että kuvajoukko sijaitsee ympyrällä, jonka keskipiste on $(1/2, 0)$ ja säde $1/2$. Lisäksi voidaan päätellä kuten edellisessä tehtävässä, että kuvajoukkoon kuuluvat itse asiassa kaikki ympyrän pisteet origoa lukuunottamatta.