Geometria 2013
Harjoitus 6
Ratkaisuehdotuksia (Jokke Häsä)

Tehtävä 1. Miten kolmion kulman puolittaja jakaa vastakkaisen sivun? Todista väitteesi.

Ratkaisu. Kolmion kulman puolittaja jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Todistus löytyy Väisälän 105 §:stä.

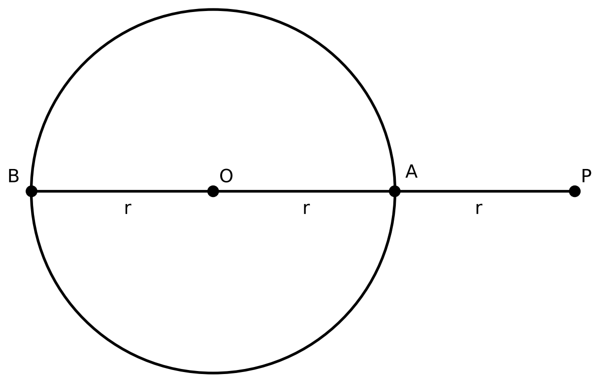
Tehtävä 2. Kolmiossa kulman puolittajat kulkevat keskijanojen leikkauspisteen kautta. Mitä tiedät tämän perusteella? Todista väitteesi.

Ratkaisu. Tarkastellaan yhtä kolmion kärkeä A. Tuossa kärjessä olevan kulman puolittaja kulkee oletuksen mukaan keskijanojen leikkauspisteen kautta. Koska kahden pisteen kautta voi kulkea vain yksi suora, täytyy keskijanan yhtyä kulmanpuolittajaan. Edellisen tehtävän perusteella kulmanpuolittaja jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Toisaalta keskijana jakaa sivun tasan kahteen osaan. Voidaan siis päätellä, että kulman A viereiset sivut ovat saman pituiset. Kun tämä toistetaan jollekin toisellekin kulmalle, nähdään, että kolmio on tasasivuinen.

Tehtävä 3. Ympyrän y säde on r ja pisteen P etäisyys ympyrän keskipisteestä on $2r$. Laske pisteen P potenssi ympyrän y suhteen.

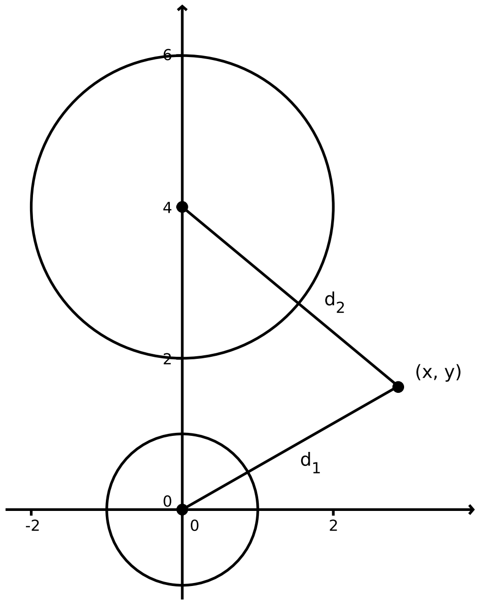
Ratkaisu. Potenssin laskemiseen voi käyttää mitä tahansa sekanttia. Valitaan nyt sellainen, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta. Olkoot A ja B pisteet, joissa sekantti leikkaa ympyrän kehää. Tällöin $|PA| = 2r - r = r$ ja $|PB| = 2r + r = 3r$. Täten potenssi on

$$|PA| \cdot |PB| = r \cdot 3r = 3r^2.$$



Tehtävä 4. Määritä ne pisteet, joiden potenssi ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ suhteen on yhtä suuri kuin niiden potenssi ympyrän $x^2 + (y-4)^2$ suhteen.

Ratkaisu. Olkoon (x, y) sellainen piste, että tehtävänannossa mainitut potenssit ovat yhtä suuret. Oletetaan ensin, että piste on molempien ympyröiden ulkopuolella.



Käytetään potenssien laskemiseksi sekantteja, jotka kulkevat ympyröiden keskipisteiden kautta. Olkoon d_1 pisteen (x, y) etäisyys ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ keskipisteestä, ja olkoon r_1 saman ympyrän säde. Kuten edellisessäkin tehtävässä, ensimmäiseksi potenssiksi saadaan

$$p_1 = (d_1 - r_1)(d_1 + r_1) = d_1^2 - r_1^2 = x^2 + y^2 - 1.$$

Olkoon sitten d_2 pisteen (x, y) etäisyys ympyrän $x^2 + (y - 4)^2 = 4$ keskipisteestä, ja olkoon r_2 ympyrän säde. Potenssiksi tulee

$$p_2 = (d_2 - r_2)(d_2 + r_2) = d_2^2 - r_2^2 = x^2 + (y - 4)^2 - 4 = x^2 + y^2 - 8y + 12.$$

Jotta potenssit olisivat yhtä suuret, täytyy päteä

$$p_1 = p_2 \iff 8y - 12 = 1 \iff y = \frac{13}{8}.$$

Piste sijaitsee siis suoralla $y = \frac{13}{8}$.

Oletetaan sitten, että piste on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ sisäpuolella. Kun nyt käytetään ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevia sekantteja, ensimmäiseksi potenssiksi tuleekin

$$p_1 = (r_1 - d_1)(r_1 + d_1) = r_1^2 - d_1^2 = 1 - x^2 - y^2.$$

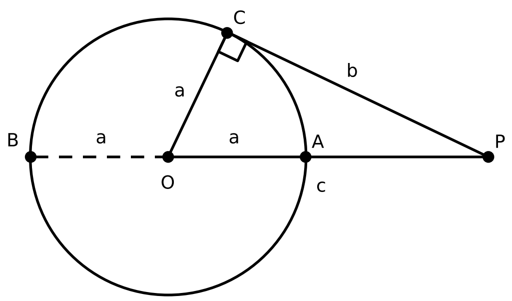
Toinen potenssi säilyy samana kuin edellä (koska piste ei voi olla molempien ympyröiden sisäpuolella). Jotta potenssit olisivat yhtä suuret, täytyisi päteä

$$\begin{aligned} & 1 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 - 8y + 12 \\ \iff \quad & 2x^2 + 2y^2 - 8y + 11 = 0 \\ \iff \quad & x^2 + y^2 - 4y + \frac{11}{2} = 0 \\ \iff \quad & x^2 + (y-2)^2 + \frac{3}{2} = 0. \end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö ei kuitenkaan ole tosi, sillä kaikki vasemman puolen yhteenlaskettavat ovat epänegatiivisia. Piste ei siis voi sijaita ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ sisäpuolella. Samalla tavalla voidaan näyttää, että piste ei voi sijaita myöskään ympyrän $x^2 + (y-4)^2 = 4$ sisäpuolella.

Tehtävä 5. Todista Pythagoraan lause käyttäen pisteen potenssia ympyrän suhteen. Voit esimerkiksi käyttää ympyrää, jonka keskipiste on hypotenuusan päätepiste ja säde tästä lähtevä kateetti.

Todistus. Käytetään tehtävänannossa mainittua ympyrää ja lasketaan pisteen potenssi kahdella tavalla.



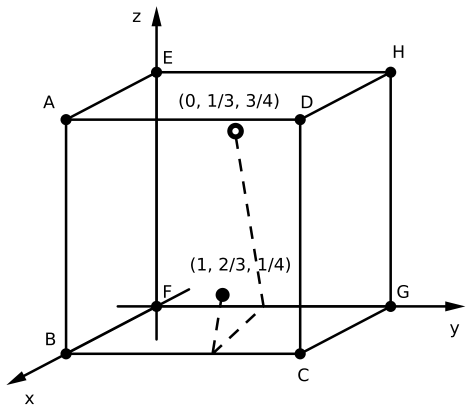
Käyttämällä sekanttina tangenttia PC saadaan pisteen potenssiksi $|PC|^2 = b^2$ (vrt. Väisälän 106 §:n seuraus). Valitsemalla toinen sekantti kulkemaan ympyrän keskipisteen kautta (kuten edellisissäkin tehtävissä), saadaan potenssiksi

$$|PA| \cdot |PB| = (c-a)(c+a) = c^2 - a^2.$$

Koska potenssi on riippumaton sekantin valinnasta, saadaan tulokseksi $b^2 = c^2 - a^2$, josta Pythagoraan lause seuraa. $\square$

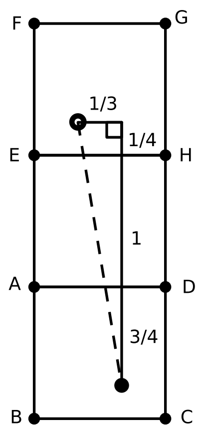
Tehtävä 6. Kuution kärjet ovat pisteet (a, b, c), missä kukin koordinaatti on 0 tai 1. Ötökkä kulkee pitkin kuution pintaa. Määritä pisteiden $(0, 1/3, 3/4)$ ja $(1, 2/3, 1/4)$ välinen lyhimmän reitin pituus.

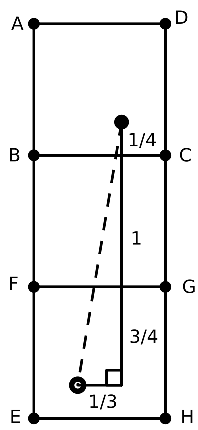
Ratkaisu. Lyhin reitti on helpointa löytää taittelemalla kuutio auki. Tällöin tahkot, joiden välinen särmä ötökän on ylitettävä, tulevat vierekkäin samaan tasoon, ja lyhin reitti särmän yli on suora linja.



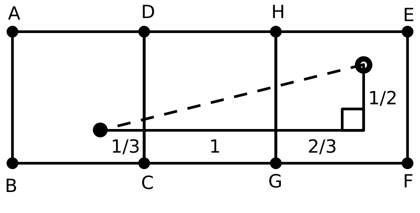
Ratkaisematta jää, minkä tahkojen kautta ötökän on kuljettava. Koska tätä on vaikea nähdä suoraan, on parasta tarkistaa kaikki vaihtoehdot. Ainakin voidaan olettaa, että ötökkä kulkee lähtö- ja maalitahkojen lisäksi ainoastaan yhden tahkon poikki, muuten matkasta tulee tarpeettoman pitkä.

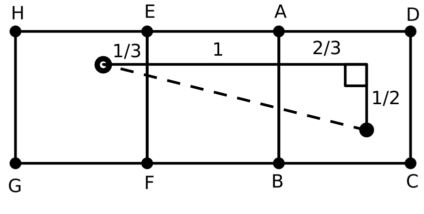
Seuraavissa kuvissa on esitetty reitit kuution ylä- ja alatahkojen poikki. Pythagoraan lauseen avulla on helppo laskea, että kummankin reitin pituudeksi tulee $\sqrt{2^2 + 1/3^2} = \sqrt{37}/3$.





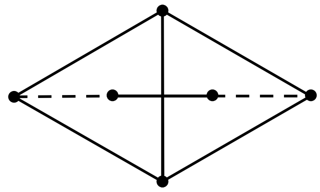
Seuraavissa kuvissa on piirretty reitit kuution molempien sivutahkojen poikki. Kummankin reitin pituudeksi tulee $\sqrt{2^2 + 1/2^2} = \sqrt{17}/2$. Lyhin reitti siis kulkee joko kuution ylä- tai alatahkon kautta, ja sen pituus on $\sqrt{37}/3$.





Tehtävä 7. Säännöllisen tetraedrin särmä on a. Ötökkä kulkee pitkin tetraedrin pintaa. Määritä kahden tahkon keskipisteen välinen etäisyys.

Ratkaisu. Käytetään jälleen samaa ideaa kuin edellisessä tehtävässä, eli taitellaan tetraedri auki. Nyt tarvitsee tarkastella vain yhtä särmän ylitystä.



Tahkon keskijanan pituus saadaan muistikolmiosta tai Pythagoraan lauseen avulla, ja se on $\sqrt{3}a/2$. Tahkon keskipiste puolestaan jakaa tunnetusti keskijanan suhteessa 1:2, joten keskipisteen etäisyys lähimmästä reunasta on $a/(2\sqrt{3})$. Keskipisteiden välinen etäisyys on siis $a/\sqrt{3}$.

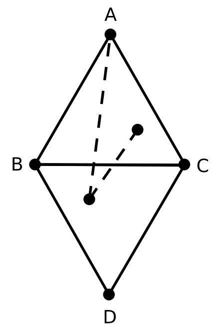
Tehtävä 8. Kuinka kaukana voivat edellisen tehtävän tetraedrin pinnan kaksi pistettä olla ötökkämme kannalta.

Ratkaisu. Tehtävässä kysytään siis, kuinka kaukana voivat sellaisen tetraedrin, jonka särmän pituus on a, kaksi mielivaltaista pinnan pistettä olla, jos etäisyys mitataan pintaa pitkin lyhimpänä mahdollisena ötökän kulkemana matkana.

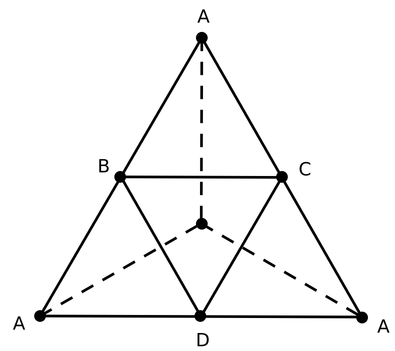
Tässä esitettävä ratkaisu perustuu monelta kohtaa geometriseen intuitioon. Ratkaisun jälkeen annetaan vielä vihjeitä siitä, miten perustelut voisi tehdä täsmällisiksi.

Oletetaan ensin, että kaukaisimmat mahdolliset pisteet olisivat samalla tahkolla. Tällöin niiden täytyisi sijaita tahkokolmion nurkissa, jotta niiden etäisyys olisi mahdollisimman pitkä [1]. Tämä etäisyys olisi siis a. Tullaan kuitenkin näkemään, että pidempikin etäisyys on mahdollista saavuttaa.

Oletetaan sitten, että pisteet ovat eri tahkoilla. Tällöin ne ovat vierekkäisillä tahkoilla, koska tetraedrin kaikki tahkot ovat vierekkäisiä. Levitetään nuo tahkot tasoon seuraavan kuvan mukaisesti. Oli alemman tahkon piste missä tahansa kohdassa tahkoa, siitä laskettuna kaikista kauimmaisin piste ylemmällä tahkolla on kolmion vastakkaisessa kärjessä A [2]. (Poikkeuksena tapaus, jossa alemman tahkon piste on kärjessä B tai C, jolloin kauimmainen piste voi olla myös toisessa näistä kärjistä. Etäisyys on kuitenkin tällöin sama kuin pisteeseen A.) Voidaan siis olettaa, että ylemmän tahkon piste on kärjessä A.



Asetetaan nyt tetraedri siten, että kärki A on tetraedrin huipussa, ja levitetään kaikki sivutahkot auki. Saadaan suuri tasasivuinen kolmio, jonka keskellä on tetraedrin pohjakolmio BCD ja jonka kaikki kärjet vastaavat huippukärkeä A. Toinen pisteistä on kärjessä A ja toinen tetraedrin pohjalla. Pisin etäisyys saadaan, kun viimeksi mainittu piste on täsmälleen pohjan keskipisteessä. Nimittäin jos piste poikkeaa tästä, se on aina hiukan lähempänä jotakin suuren kolmion kärkeä ja siten pistettä A [3]. Tämä pisin etäisyys on tasasivuisen kolmion keskipisteen etäisyys kolmion kärjestä, ja koska sivun pituus on $2a$, saadaan tulokseksi $2a/\sqrt{3}$.



Tarkemmat perustelut. Väite [1], jonka mukaan tasasivuisella kolmiolla kauimpana toisistaan sijaitsevat pisteet ovat kolmion kahdessa nurkassa, voidaan perustella esimerkiksi seuraavasti. Piirretään ensin pisteiden kautta kulkeva suora. Nyt niiden pisteiden, joissa kyseinen suora leikkaa kolmion sivuja, etäisyys toisistaan on suurempi kuin alkuperäisten pisteiden. Tästä voidaan päätellä, että kauimpana toisistaan sijaitsevat pisteet sijaitsevat kolmion reunoilla.

Olkoot tarkasteltavat pisteet P ja Q, jotka siis sijaitsevat kolmion reunoilla. Kiinnitetään P. Jos tilanne siirretään koordinaatistoon niin, että P on origossa, ja Q:n etäisyys P:stä kirjoitetaan lausekkeena, saadaan maksimoitavaksi toisen asteen polynomi (etäisyyden neliö). Tämän derivaatan nollakohta (paraabelin huippu) antaa lyhimmän etäisyyden, ja pisin etäisyys saavutetaan, kun Q on reunansa jommassakummassa päätepisteessä. Sama voidaan toistaa P:lle, jolloin nähdään, että molempien pisteiden on oltava kolmion nurkissa.

Väite [2] voidaan perustella samalla tavalla. Nyt on kiinnitettävä alatahkon piste origoon. Lisäksi on perusteltava, että suurin etäisyys saavutetaan nimenomaan kärkipisteessä A (ellei alatahkon piste ole kärjessä B tai C.)

Väite [3] nähdään todeksi jakamalla suuri kolmio keskinormaaliensa avulla kuuteen suorakulmaisen kolmion muotoiseen alueeseen alla olevan kuvan esittämällä tavalla. Pohjalla oleva piste on yhdessä näistä kuudesta alueesta, ja symmetrian vuoksi riittää tarkastella yhtä tällaista aluetta. Jos asetetaan alueen kärki A origoon ja muodostetaan jälleen lauseke pisteen etäisyydelle kärjestä A, maksimointi johtaa lopulta siihen, että haluttu piste sijaitsee alueen siinä kärjessä, joka vastaa tetraedrin pohjan keskipistettä.