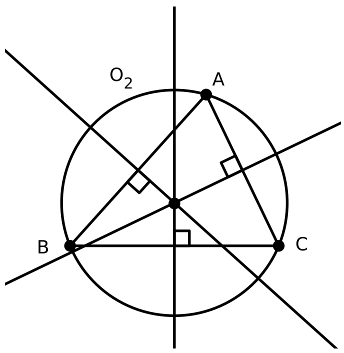
Geometria 2013
Harjoitus 5
Ratkaisuehdotuksia (Jokke Häsä)

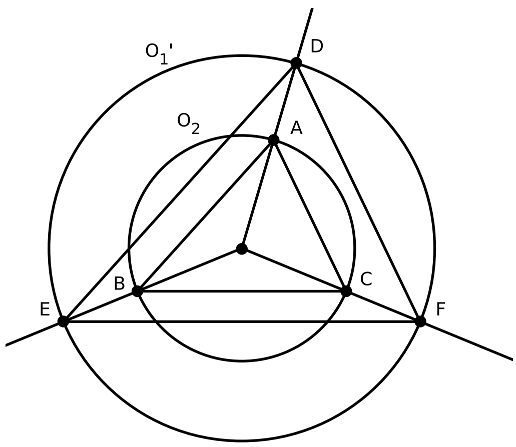
Tehtävä 1. Piirrettävä harpilla ja viivaimella annetun kolmion muotoinen kolmio annetun ympyrän sisälle. (Piirretyn kolmion kärjet ovat siis annetun ympyrän kehällä.)

Ratkaisu. Käytetään piirtämisessä apuna homotetiaa. Pyritään skaalaamaan annettua kolmiota ABC siten, että siitä tulee samankokoinen kuin annetun ympyrän O_1 sisään piirretty samanmuotoinen kolmio. Sen jälkeen kolmio voidaan siirtää ympyrän O_1 sisälle.

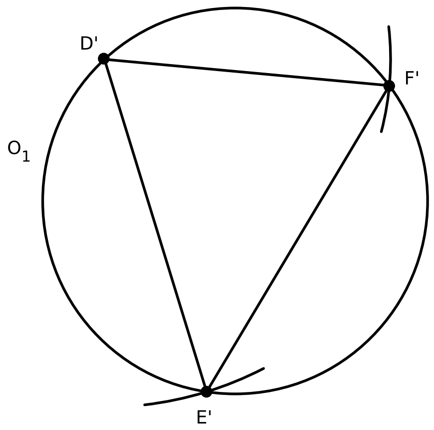
Sopiva skaalauskerroin löydetään esimerkiksi vertaamalla ympyrän O_1 sädettä sellaisen ympyrän O_2 säteeseen, joka on piirretty kolmion ABC ympäri. Kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste. Keskinormaalit osataan jo piirtää (piirto-ohje löytyy myös Väisälän kirjan 25 §:stä), joten ympyrä O_2 löytyy helposti.



Siirretään sitten annettu ympyrä O_1 ympyrän O_2 kanssa samakeskiseksi ympyräksi O_1'. Käyttäen yhteistä keskipistettä homotetiakeskuksena piirretään säteet kolmion ABC kärkien kautta. Pisteet D, E ja F, missä säteet leikkaavat ympyrän O_1' muodostavat halutunkokoisen kolmion, joka on yhdenmuotoinen kolmion ABC kanssa.

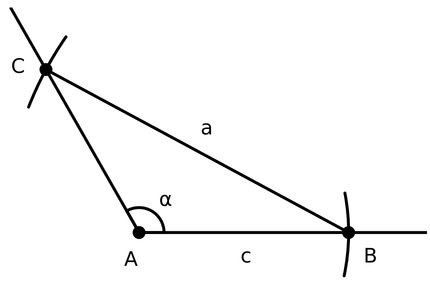


Lopuksi on vielä siirrettävä kolmio DEF annetun ympyrän O_1 sisään. Valitaan tuon ympyrän kehältä mielivaltainen piste kolmion kärkeä D vastaavaksi kärjeksi D'. Erotetaan sitten ympyränkehältä D' keskipisteenä harpilla sivuja DE ja DF vastaavat etäisyydet. Yhdistetään pisteet, ja kolmio on valmis.



Tehtävä 2. Piirrettävä kolmio, kun tunnetaan sen kaksi sivua ja toisen vastainen kulma, joka on lisäksi tylppä. (Väisälä: s. 39, teht. 118.)

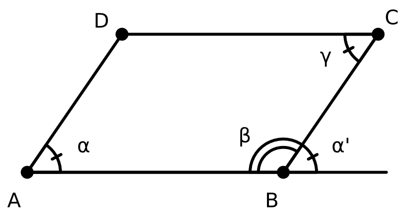
Ratkaisu. Olkoot annettujen sivujen pituudet a ja c, ja olkoon annettu a:n vastainen kulma α. Lähdetään liikkeelle kulmasta α. Erotetaan harpin avulla sen toisesta kyljestä c:n pituinen jana AB (kulman kärkenä A). Piirretään sitten piste B keskipisteenä ja a säteenä ympyränkaari. Olkoon C piste, jossa kyseinen kaari leikkaa kulman toisen kyljen. Kolmio ABC on nyt haluttu kolmio.



Ratkaisujen lukumäärä riippuu siitä, kuinka monessa pisteessä viimeinen piirrettävä ympyränkaari leikkaa kulman toisen kyljen. Väisälän 37 §:ssä on kuitenkin todettu, että jos leikkauspisteitä on enemmän kuin yksi, pisteeseen C syntyvät vaihtoehtoiset kulmat ovat toistensa suplementtikulmia (niiden summa on oikokulma). Toisen vaihtoehdon olisi siis oltava vähintään suora kulma. Koska tehtävänannossa annettu kulma α on tylppä, syntyvän kolmion kaikki muut kulmat ovat välttämättä teräviä. Siksi vaihtoehtoja on vain yksi.

Tehtävä 3. Todistettava, että suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtäsuuret. Millaisia ovat vierekkäiset kulmat? (Väisälä: s. 69, teht. 220.)

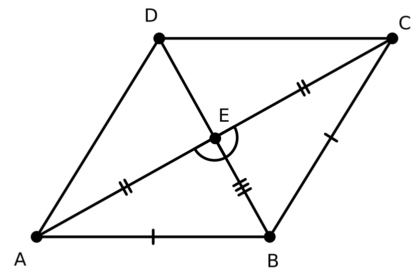
Todistus. Käytetään kirjassa olevan neuvon mukaan 18 §:n lausetta 1. Kulman α vasen kylki on AD ja oikea kylki AB. Kulman γ vasen kylki on puolestaan BC ja oikea kylki CD. Suunnikkaan määritelmän mukaan sivut BC ja AD ovat yhdensuuntaiset, samoin sivut AB ja CD. Mainitun lauseen perusteella kulmat α ja γ ovat yhtä suuret.



Tarkastellaan sitten vierekkäisiä kulma α ja β. Jatkamalla sivua AB pisteen B yli nähdään, että kulmat α ovat α' ovat yhtä suuria, sillä ne ovat samankohtaiset kulmat yhdensuuntaisten suorien AD ja BC leikatessa suoraa AB. Koska kulmien β ja α' summa on oikokulma, saamme tuloksen, että suunnikkassa kahden vierekkäisten kulman summa on aina oikokulma. □

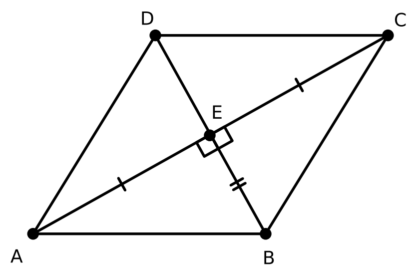
Tehtävä 4. Todistettava, että neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. (Väisälä: s. 71, teht. 228.)

Todistus. Koska suunnikas $ABCD$ on neljäkäs, sen kaikki sivut – erityisesti sivut AB ja BC – ovat yhtä pitkiä. Lisäksi Väisälän 64 §:n lauseen 1 (tehtävänantoa edeltävällä sivulla) mukaan suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa, joten $|AE| = |EC|$. (Tämä on hyödyllinen tulos; kannattaa tutustua sen todistukseen.) Näin ollen kolmiot ABE ja CBE ovat yhtenevät (SSS). Seurauksena on, että $\measuredangle AEB = \measuredangle CEB$. Koska lisäksi kulmien AEB ja CEB summa on oikokulma, ovat molemmat kulmat välttämättä suoria. □



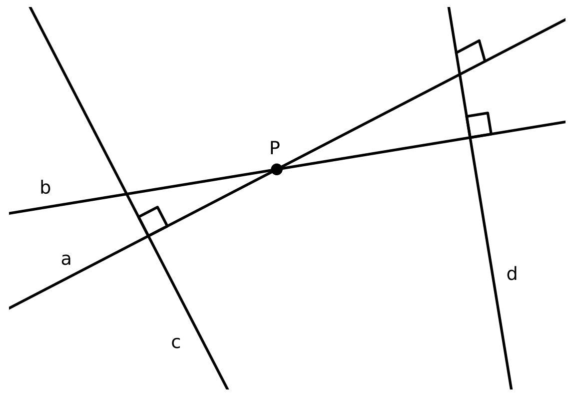
Tehtävä 5. Todistettava, että suunnikas, jonka lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, on neljäkäs. (Väisälä: s. 71, teht. 229.)

Todistus. Käytetään jälleen 64 §:n lausetta 1. Sen mukaan $|AE| = |EC|$. Koska suunnikkaan lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kulmat AEB ja CEB ovat yhtä suuret. Nyt kolmiot ABE ja CBE ovat yhtenevät (SKS), joten vastinsivut AB ja BC ovat yhtä pitkät. Samalla tavoin voidaan tarkastella mitä tahansa vierekkäisiä kolmioita kuviossa ja päätellä lopulta, että kaikki suunnikkaan sivut ovat yhtä pitkät. (Voidaan myös vedota siihen, että suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.) □



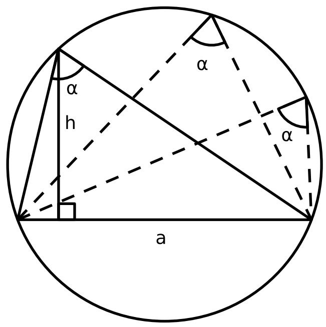
Tehtävä 6. Osoita, että kahden toisensa leikkaavan suoran normaalitkin leikkaavat toisensa.

Todistus. Tarkastellaan suoria a ja b, jotka leikkaavat pisteessä P, sekä näiden normaaleja c ja d. Tehdään vastaoletus, että c ja d eivät leikkaa toisiaan. Ne ovat tällöin yhdensuuntaiset. Koska a on suorassa kulmassa c:ta vastaan ja c ja d ovat yhdensuuntaiset, kirjan 17 §:n seurauksen 2 perusteella a on suorassa kulmassa myös d:tä vastaan. Nyt nähdään, että a ja b ovat molemmat suoran d normaaleja, jotka kulkevat pisteen P kautta. Tämä on ristiriidassa 14 §:n lauseen kanssa, joka sanoo, että annetun pisteen kautta voidaan piirtää annetulle suoralle täsmälleen yksi normaali. Vastaoletus on siis väärä, joten normaalit leikkaavat toisensa. □

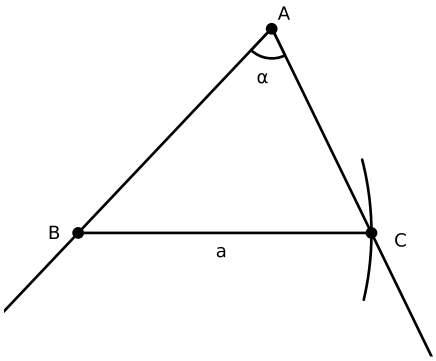


Tehtävä 7. Piirrettävä kolmio, kun tunnetaan sen kanta, korkeus ja kannan vastainen kulma ("huippukulma"). (Väisälä: s. 88, teht. 278.)

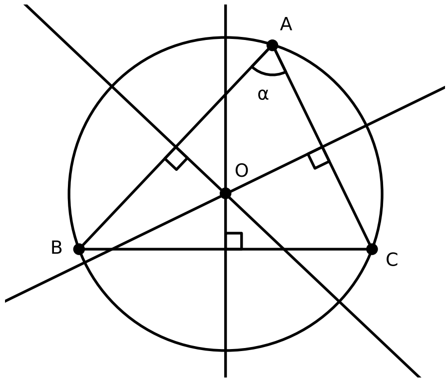
Ratkaisu. Olkoot annettu kanta a, korkeus h ja huippukulma α. Ideana on käyttää tehtävää edeltävää lausetta, jonka mukaan pisteet, joista annettu jana näkyy annetun kulman suuruisena, ovat ympyränkaarella, jonka jänteenä on annettu jana. Strategiana on löytää aluksi kyseinen ympyrä ja sen jälkeen etsiä tuolta ympyränkaarelta ne pisteet, jotka ovat oikealla korkeudella annetusta janasta.



Piirretään ensin jokin kolmio, jonka kantana on a ja huippukulmana α. Tämä saadaan valitsemalla annetun kulman yhdeltä kyljeltä piste B (ei liian kaukaa kulman kärjestä) ja piirtämällä a-säteinen ympyrä piste B keskipisteenä. Jos A on kulman kärkipiste ja C on piste, jossa ympyrä leikkaa toisen kyljen, kolmio ABC on haluttu kolmio.

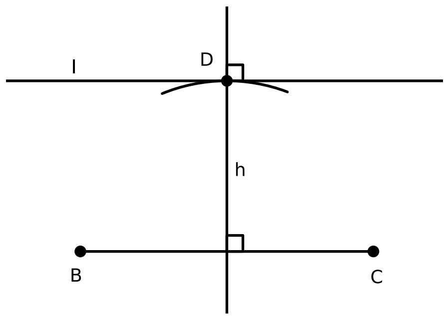


Etsitään sitten ympyrä, jolla on jänteenä jana BC ja sitä vastaavana kehäkulmana α. Tätä varten piirretään ympyrä kolmion ABC kärkien kautta. Ympyrän keskipisteeksi tulee kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste (ks. 72 §, keskinormaalin piirto-ohje 25 §:ssä).

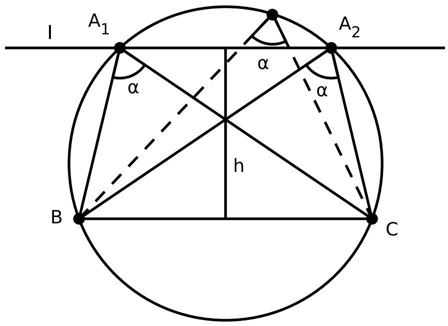


Nyt on enää löydettävä ympyränkaarelta ne pisteet, jotka ovat korkeudella h kannasta BC. Tämä onnistuu hakemalla piste, jonka etäisyys suorasta BC on h, ja piirtämällä tämän pisteen kautta kannan kanssa yhdensuuntainen suora. Tähän tarvittavia taitoja käsitellään Väisälän kirjan 26 §:ssä (ks. erityisesti sivun 27 alaviite).

Piirretään suoralle BC normaali, esimerkiksi jo aiemmin piirretty sivun BC keskinormaali. Erotetaan tältä normaalilta h:n pituinen jana siten, että päätepisteenä on piste, jossa normaali leikkaa suoran BC. Olkoon D tämän janan uusi päätepiste. Sen jälkeen piirretään BC:n keskinormaalille uusi normaali l pisteen D kautta (piirto-ohje 26 §:ssä).



Tehtävän ratkaisukolmion huippu sijaitsee nyt suoran l ja ympyrän ABC leikkauspisteessä. Jos korkeus h on liian suuri, leikkauspistettä ei löydy eikä kolmiota näin ollen ole olemassa. Jos h on lyhyempi kuin kannan BC pisin etäisyys ympyrän vastakkaisesta reunasta, leikkauspisteitä on kaksi.



Tehtävä 8. Todistettava, että ympyrän ympäri piirretyn nelikulmion vastakkaisten sivujen summat ovat yhtäsuuret. (Väisälä: s. 90, teht. 278.)

Todistus. Olkoot annetun ympyrän ja sen ympäri piirretyn nelikulmion $ABCD$ sivuamispisteet E, F, G ja H (ks. oheinen kuva). Ympyrän keskipisteestä O kahteen leikkauspisteeseen piirretyt janat OE ja OF ovat yhtä pitkät, koska niiden pituus on ympyrän säde. Lisäksi kulmat AEO ja AFO ovat molemmat suoria kulmia, koska ympyrän säde on aina kohtisuorassa sivuajaa vastaan. Täten kolmiot AEO ja AFO ovat yhtenevät (SSK, tylppäkulmainen vaihtoehto ei tule kyseeseen, sillä kolmiot ovat suorakulmaisia.) Siispä janat AE ja AF ovat yhtä pitkät.

Samalla tavalla voidaan päätellä, että $|BF| = |BG|$, $|CG| = |CH|$ ja $|DH| = |DE|$. Nyt

$$|AD|+|BC| = |AE|+|DE|+|BG|+|CG| = |AF|+|BF|+|DH|+|CH| = |AB|+|CD|.$$

Nelikulmion vastakkaisten sivujen pituuksien summat ovat siis yhtä suuret. □