Geometria 2013
Harjoitus 4
Ratkaisuehdotuksia (Jokke Häsä)

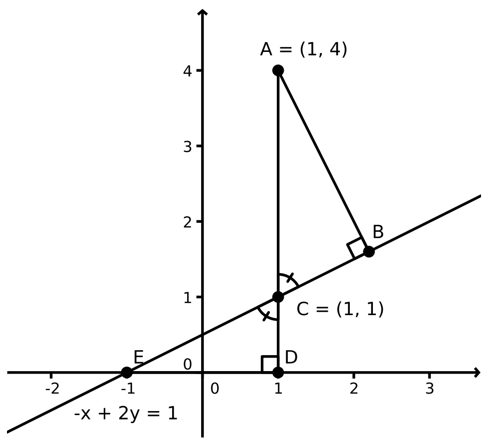
Tehtävä 1. Selvitä pisteen $(1,4)$ etäisyys suorasta $2y = x + 1$ käyttämättä "kaavaa pisteen etäisyydelle suorasta". Yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista on apua.

Ratkaisu. Piirretään pisteestä $A = (1,4)$ jana kohtisuoraan annetulle suoralle ja merkitään syntyvää leikkauspistettä B:llä (ks. oheinen kuva). Piirretään A:sta myös jana kohtisuoraan x-akselille pisteeseen D. Piste C, jossa jana leikkaa annetun suoran, on $(1,1)$ (saadaan suoran yhtälöstä). Olkoon E piste, jossa annettu suora leikkaa x-akselin. Tällöin $E = (-1,0)$ (jälleen suoran yhtälöstä). Etäisyyksistä tunnetaan nyt

$$|AC| = 4 - 1 = 3, \quad |CD| = 1 \quad \text{ja} \quad |DE| = 2.$$

Pythagoraan lauseen perusteella

$$|CE| = \sqrt{|CD|^2 + |DE|^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$



Suorakulmaiset kolmiot ACB ja ECD ovat yhdenmuotoiset, sillä kulmat ACB ja ECD ovat ristikulmia. Kolmioiden pidempien kateettien suhde on siis sama kuin hypotenuusien suhde:

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|CE|}.$$

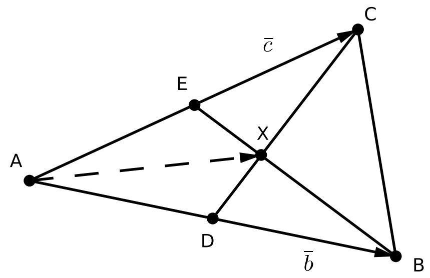
Tästä saadaan haluttu etäisyys:

$$|AB| = \frac{|AC| \cdot |DE|}{|CE|} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Huom. Jos tehtävässä korvaa annetun pisteen ja suoran mielivaltaisella pisteellä ja suoralla, tehtävä antaa keinon johtaa mainittu kaava pisteen etäisyydelle suorasta.

Tehtävä 2. Osoita vektoreiden avulla, että kolmion keskijanoilla on yhteinen piste.

Todistus. Olkoon X kolmion ABC sivujen AB ja AC vastaisten keskijanojen leikkauspiste (jos se on olemassa). Merkitään $\bar{b} = \overrightarrow{AB}$ ja $\bar{c} = \overrightarrow{AC}$. Kirjoitetaan vektori $\overrightarrow{AX}$ kahdella eri tavalla käyttäen hyväksi eri keskijanoja.



Jos D on sivun AB keskipiste, tiedetään, että $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\bar{b}$. Toisaalta jollain (tuntemattomalla) reaaliluvulla r pätee

$$\overrightarrow{DX} = r\overrightarrow{DC} = r(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = r\left(\bar{c} - \frac{1}{2}\bar{b}\right).$$

Näin saadaan esitys

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DX} = \frac{1}{2}\bar{b} + r\left(\bar{c} - \frac{1}{2}\bar{b}\right) = \frac{1}{2}(1-r)\bar{b} + r\bar{c}.$$

Olkoon E vastaavasti sivun AC keskipiste. Samaan tapaan kuin edellä saadaan esitys

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EX} = \frac{1}{2}\bar{c} + s\left(\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{c}\right) = s\bar{b} + \frac{1}{2}(1-s)\bar{c},$$

missä s on jokin tuntematon reaaliluku.

Jos keskijanat CD ja BE leikkaavat, eli piste X on olemassa, saadaan vektorin $\overrightarrow{AX}$ eri esityksistä yhtälö

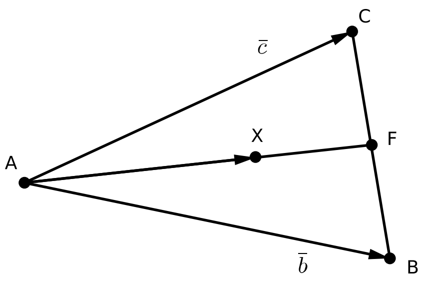
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1-r)\bar{b} + r\bar{c} = s\bar{b} + \frac{1}{2}(1-s)\bar{c} \\ \iff \; & \frac{1}{2}(1-r)\bar{b} - s\bar{b} = \frac{1}{2}(1-s)\bar{c} - r\bar{c} \\ \iff \; & (1-r-2s)\bar{b} = (1-s-2r)\bar{c}. \end{aligned}$$

Koska vektorit $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ovat erisuuntaisia, viimeinen yhtälö ei voi päteä, ellei skalaarikerroin ole nolla kummallakin puolella. Saadaan siis yhtälöryhmä

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1-r-2s & = & 0 \\ 1-s-2r & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} r+2s & = & 1 \\ s+2r & = & 1 \end{array} \right. .$$

Tämä yhtälöryhmä on helppo ratkaista, ja ratkaisu on $r = 1/3$ ja $s = 1/3$.

Nyt siis tunnetaan vektori $\overrightarrow{AX}$ (ja sitä myöten pisteen X sijainti kolmiossa). Tarkistetaan vielä, että piste on myös kolmannella keskijanalla.



Jos F on sivun BC keskipiste, kolmatta keskijanaa kuvaa vektori

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \bar{b} + \frac{1}{2}(\bar{c} - \bar{b}) = \frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{c}).$$

Nyt vektorille $\overrightarrow{AX}$ pätee aiempien laskujen perusteella

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}(1 - r)\bar{b} + r\bar{c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\bar{b} + \frac{1}{3}\bar{c} = \frac{1}{3}(\bar{b} + \bar{c}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}.$$

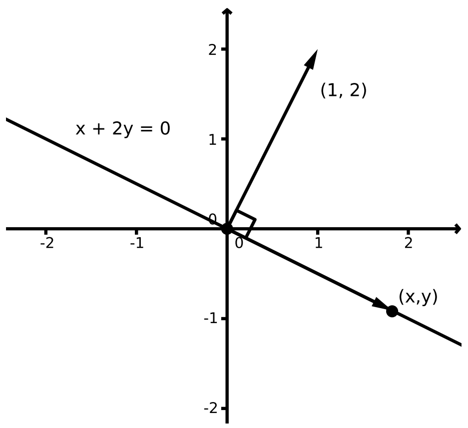
Piste X on siis myös kolmannella keskijanalla, eli se on kaikkien kolmen keskijanan leikkauspiste. □

Tehtävä 3. Määritä ne pisteet (x, y), joille vektorin $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ja vektorin $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ pistetulo on 0. Yhtälö ja sanallinen kuvailu!

Ratkaisu. Pistetulosta saadaan yhtälö

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = x + 2y = 0.$$

Tämä on sellaisen origon kautta kulkevan suoran yhtälö, jonka kulmakerroin on $-1/2$.



Miten tulosta olisi voinut ennakoida laskematta pistetuloa? Jos kahden vektorin pistetulo on 0, ne ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Vektori $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ on pisteen (x, y) paikkavektori. Kysytään siis sellaisia pisteitä, joiden paikkavektori on suorassa kulmassa vektoria $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ vastaan. On helppo nähdä, että tällaiset pisteet muodostavat origon kautta kulkevan suoran, joka on kohtisuorassa vektoria $\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ vastaan. Sen kulmakerroin on siksi $-1/2$. (Lineaarialgebrassa tulossuoraa kutsuttaisiin vektorin $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ virittämän aliavaruuden ortogonaaliseksi komplementiksi.)

Tehtävä 4. Määritä ne pisteet (x, y), joille vektorin $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ ja vektorin $\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ pistetulo on luvun 5 neliöjuuri. Yhtälö ja sanallinen kuvailu!

Ratkaisu. Pistetulosta saadaan yhtälö

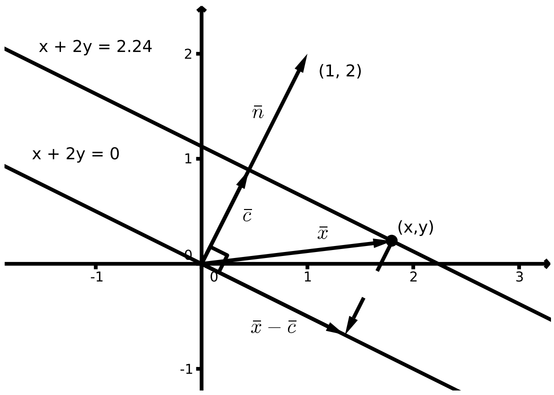
$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = x + 2y = \sqrt{5}.$$

Tämä on sellaisen suoran yhtälö, jonka kulmakerroin on $-1/2$ ja joka kulkee pisteen $(\sqrt{5}, 0)$ kautta.

Miten nyt voitaisiin päätellä tehtävänannosta suoraan, minkälainen kuvio on kyseessä? Suoralle, joka ei kulje origon kautta, saadaan *normaalimuotoinen* yhtälö siirtämällä se ensin kulkemaan origon kautta. Tämä tapahtuu vähentämällä jokaisesta suoran pistettä kuvaavasta paikkavektorista jonkin kiinnitetyn suoralla olevan pisteen paikkavektori. Olkoon tuo paikkavektori esimerkiksi $\bar{c}$. Jos suoran pistettä kuvaa paikkavektori $\bar{x}$, origoon siirretyn suoran vastaavan pisteen paikkavektori on siis $\bar{x} - \bar{c}$. Jos halutaan, että tämä origon kautta kulkeva suora on kohtisuorassa jotakin vektoria $\bar{n}$ vastaan, on vaadittava, että

$$(\bar{x} - \bar{c}) \cdot \bar{n} = 0 \quad \text{eli} \quad \bar{x} \cdot \bar{n} = \bar{c} \cdot \bar{n}.$$

Kun tämä yhtälö aukaistaan, saadaan samankaltainen yhtälö kuin tehtävässä, ns. suoran normaalimuotoinen yhtälö (koska vektori $\bar{n}$ on suoran normaalin suuntavektori).



Edetään nyt edellä olevaa päättelyä lopusta alkuun, jotta nähdään, millä tavoin tehtävänannon luvut liittyvät ratkaisuna saatuun suoraan. Tehtävänannossa vaadittiin, että

$\bar{x} \cdot \bar{n} = \sqrt{5}$, missä $\bar{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ja $\bar{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Päättelymme mukaan pitäisi löytää sellainen vektori $\bar{c}$, että $\bar{c} \cdot \bar{n} = \sqrt{5}$. Usein halutaan lisäksi valita $\bar{c}$ vektorin $\bar{n}$ suuntaiseksi. Asetetaan siis $\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{n}$, sillä tällöin

$$\bar{c} \cdot \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{n} \cdot \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1^2 + 2^2) = \sqrt{5}.$$

Näin saadaan lopulta yhtälö

$$(\bar{x} - \bar{c}) \cdot \bar{n} = 0.$$

Tämä yhtälö kertoo meille, että pisteet, joiden paikkavektori on $\bar{x}$, muodostavat suoran, ja jos siirrämme tätä suoraa vektorin $\bar{c}$ suuntaisesti sen pituuden verran (eli suoraa vastaan kohtisuoraan matkan $|\bar{c}| = 1$), siirretty suora kulkee origon kautta ja on kohtisuorassa vektoria $\bar{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ vastaan. Vielä voidaan huomata, että suoran suunta ei muutu siirron aikana, ja koska siirtovektori on kohtisuorassa suoraa vastaan, siirtovektorin pituus ilmoittaa suoran etäisyyden origosta. Siispä kyseessä on suora, joka on kohtisuorassa vektoria $\bar{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ vastaan ja jonka etäisyys origosta on $|\bar{c}| = 1$.

Tehtävä 5. Määritä ne pisteet (x, y, z), joille vektorin $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ja vektorin $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ pistetulo on luvun 14 neliöjuuri. Yhtälö ja sanallinen kuvailu!

Ratkaisu. Pistetulosta saadaan yhtälö

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = x + 2y + 3z = \sqrt{14}.$$

Tämä on sellaisen tason yhtälö, joka leikkaa koordinaattiakselit pisteissä $(\sqrt{14}, 0, 0)$, $(0, \sqrt{14}/2, 0)$ ja $(0, 0, \sqrt{14}/3)$.

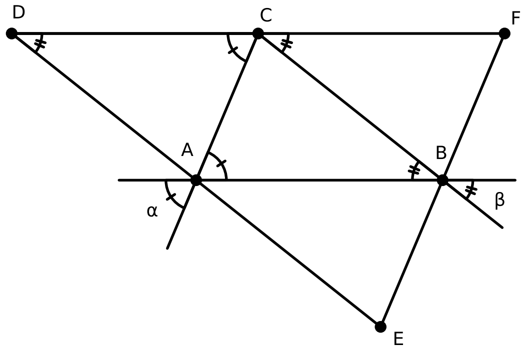
Samaan tapaan kuin edellä, kyse on tason normaalimuotoisesta yhtälöstä. Syntyvää tasoa voidaan siis kuvailla esimerkiksi niin, että se on kohtisuorassa tehtävänannon vektoria $\bar{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ vastaan ja jonka kohtisuora etäisyys origosta on $|\frac{1}{\sqrt{14}}\bar{n}| = 1$.

Tehtävä 6. Osoita, että kolmion ABC korkeusjanoilla on yhteinen piste. Voit esimerkiksi piirtää kärkien A, B ja C kautta vastakkaisten sivujen suuntaiset suorat; nämä muodostavat kolmion; osoita, että kolmion ABC korkeusjanat ovat syntyneen kolmion keskinormaaleja.

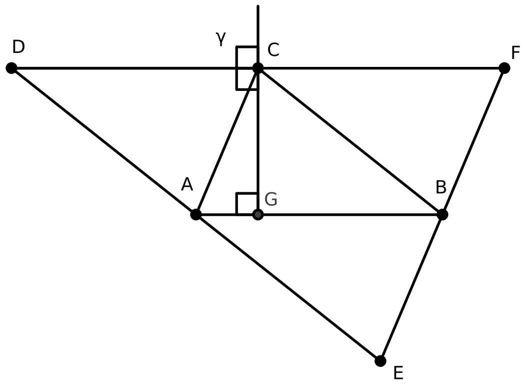
Todistus. Tarkastellaan ensin annettua vihjettä. Olkoon DEF kolmio, joka muodostuu, kun piirretään kärkien A, B ja C kautta vastakkaisten sivujen suuntaiset suorat (ks. oheinen kuva). Näyttäisi siltä, kuin kuvaan syntyneet neljä pienempää kolmiota olisivat kaikki yhteneviä. Osoitetaan se.

Tilanteen symmetrian vuoksi riittää tarkastella yhtä kolmioista: valitaan CDA. Koska janat DF ja AB ovat yhdensuuntaiset, kulmat DCA ja α ovat yhtä suuret. Toisaalta kulmat α ja CAB ovat toistensa ristikulmina yhtä suuret. Siispä $\measuredangle DCA = \measuredangle CAB$.

Myös kulmat ADC ja BCF ovat yhtä suuret, koska janat DA ja CB ovat yhdensuuntaiset. Vastaavasti kulmat BCF ja β ovat yhtä suuret, koska janat DF ja AB ovat yhdensuuntaiset. Edelleen kulmat ABC ja β ovat toistensa ristikulmia, joten lopulta $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC$. Näin ollen kolmiot ABC ja CDA ovat yhdenmuotoiset. Koska niillä on yhteinen sivu, ne ovat myös yhtenevät.



Tarkastellaan sitten alkuperäisen kolmion sivua AB vastaan piirrettyä korkeusjanaa. Koska kaikki kuvion kolmiot ovat yhtenevät, nähdään, että $|DC| = |CF|$. Korkeusjana CG leikkaa siis sivun DF sen keskipisteessä. Jos korkeusjanaa jatketaan hieman janan DF yli, syntyvä kulma γ on yhtä suuri kuin kulma AGC janojen DF ja AB yhdensuuntaisuuden takia. Kulma γ on siis suora. Toisaalta kulma DCG on kulman γ suplementtikulma (niiden yhdiste on oikokulma), joten kulma DCG on myös suora. Siispä jana CG on sivun DF keskinormaali.



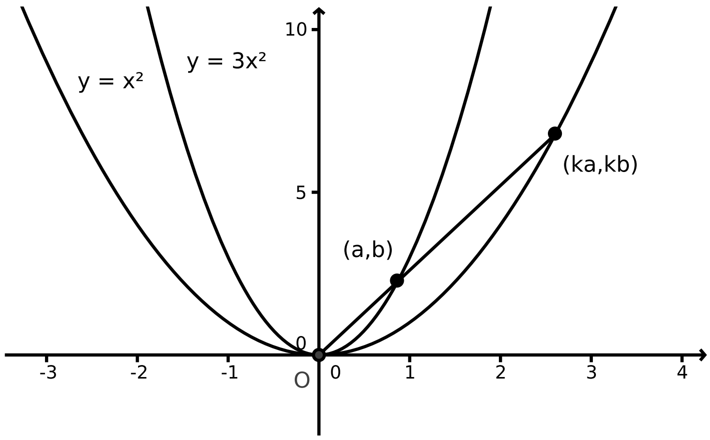
On siis päätelty, että kolmion ABC korkeusjanat yhtyvät kolmion DEF keskinormaaleihin. Koska keskinormaalit tunnetusti leikkaavat samassa pisteessä, myös kolmion ABC korkeusjanoilla on yhteinen piste, joten väite on todistettu. □

Tehtävä 7. Harppi–viivainkonstruktion ratkaisu ilmestyy erikseen.

Tehtävä 8. Osoita homotetian avulla, että käyrät $y = x^2$ ja $y = 3x^2$ ovat yhdenmuotoisia.

Todistus. Muiden tasokuvioiden kuin monikulmioiden yhdenmuotoisuus on hankalaa määritellä, saati osoittaa. Homotetia on tässä hyvä apuväline. Pidetään tunnettuna, että *homoteettiset kuviot ovat yhdenmuotoisia.*

Jos valitaan homotetiakeskukseksi origo (mikä on tarkasteltavan kuvion symmetrian vuoksi järkevää), piste (a, b) kuvautuu k-kertoimisessa homotetiassa pisteelle (ka, kb). On siis osoitettava, että löytyy sellainen vakio k, että aina kun piste (a, b) on yhdellä paraabelilla, piste (ka, kb) on toisella paraabelilla. Kokeilemalla voitaisiin selvittää k:n arvo, mutta se voidaan myös ratkaista todistuksen yhteydessä.



Olkoon piste (a, b) sisemmällä paraabelilla, eli paraabelilla $y = 3x^2$. Tällöin $b = 3a^2$, joten piste on muotoa $(a, 3a^2)$. Homotetiassa piste kuvautuu pisteeksi $(ka, 3ka^2)$, ja tämän pitäisi nyt sijaita ulommalla paraabelilla, jonka yhtälö on $y = x^2$. Täytyisi siis päteä

$$3ka^2 = (ka)^2 \quad \text{eli} \quad 3ka^2 = k^2a^2.$$

Selvästikin yllä oleva yhtälö toteutuu täsmälleen silloin, kun $k = 3$. Jos siis valitaan homotetiakertoimeksi 3, nähdään, että paraabelit ovat homoteettiset ja siten yhdenmuotoiset. $\square$