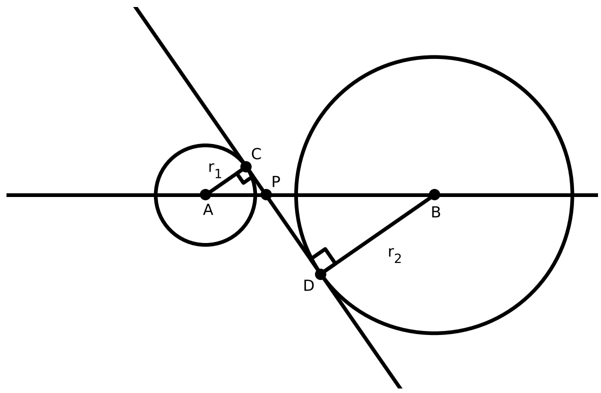
Geometria 2013
Harjoitus 3
Ratkaisuehdotuksia (Jokke Häsä)

Tehtävä 1. Tarkastellaan kahta toistensa ulkopuolella olevaa ympyrää, joiden säteet ovat eri suuret. Miten harpilla ja viivaimella voidaan piirtää niiden yhteiset tangentit?

Ratkaisu. Olkoot ympyröiden säteet r_1 ja r_2 sekä niiden keskipisteiden välinen etäisyys a. Etsitään ensin tangentit, jotka kulkevat ympyröiden välistä. Näitä on kaksi, ja ne ovat toistensa peilikuvia ympyröiden keskipisteet yhdistävän suoran suhteen. Riittää näyttää, miten löydetään niistä toinen.

Tarkastellaan ensin, millaiseen lopputulokseen halutaan päästä.

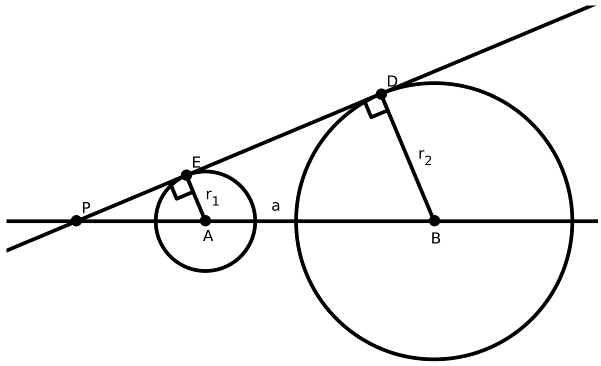


Kuvan suorakulmaiset kolmiot ACP ja BDP ovat yhdenmuotoiset, joten niiden hypotenuusien välinen suhde on sama kuin vastaavien kateettien:

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Piste P jakaa siis janan AB (jonka pituus on a) ympyröiden säteiden suhteessa. Harjoituksen 2 tehtävässä 4 opittiin löytämään tällainen piste harpilla ja viivaimella. Kun piste on löydetty, voidaan piirtää kyseisen pisteen kautta tangentti jommallekummalle ympyrälle harjoituksen 2 tehtävässä 3 opitulla tavalla. Tämä tangentti on molemmille ympyröille yhteinen.

Etsitään sitten tangentit, jotka kulkevat ympyröiden ulkopuolelta. Nytkin riittää löytää vain yksi tangentti. Tarkastellaan taas ensin, millaiseen lopputulokseen halutaan päästä.



Haluaisimme löytää jonkin pisteistä D, E tai P. Tunnemme ainoastaan etäisyydet $|AE| = r_1$, $|BD| = r_2$ ja $|AB| = a$. Selvästikin suorakulmaiset kolmiot PEA ja PDB ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisuudesta seuraa, että kolmioiden lyhyempien kateettien välinen suhde on sama kuin hypotenuusien suhde, eli

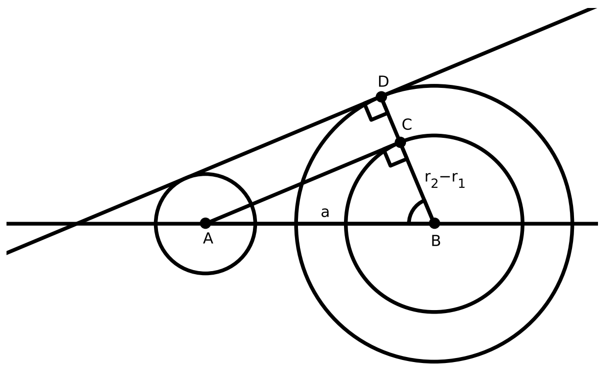
$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{|PA| + a}{|PA|}.$$

Vähentämällä yhtälön molemmilta puolilta 1 saadaan

$$\frac{r_2 - r_1}{r_1} = \frac{a}{|PA|}.$$

Tämä verranto kuvaa sitä, että kateettien erotuksen suhde pienemmän kolmion kateettiin on sama kuin hypotenuusien erotuksen suhde pienemmän kolmion hypotenuusaan. Voimme käyttää tietoa hyväksi seuraavasti: jos konstruoimme suorakulmaisen kolmion, jonka lyhyempi kateetti on $r_2 - r_1$ ja hypotenuusa a, se on yhdenmuotoinen kolmioiden PAE ja PBD kanssa. Tällöin voimme määrittää kulman PBD ja edelleen pisteen D.

Piirretään siis keskipisteenään B ympyrä, jonka säde on $r_2 - r_1$. Piirretään tälle tangentti pisteen A kautta harjoituksen 2 tehtävässä 3 opitulla tavalla. Olkoon C piste, jossa tangentti leikkaa ympyrän kehän. Nyt kulma ACB on suora, joten aiemman päättelyn nojalla kulma ABC on sama kuin haluttu kulma PBD. Jatketaan sivua BC kunnes se leikkaa suuremman ympyrän, jolloin on löydetty piste D. Piirretään tämän pisteen kautta kohtisuora janalle BD. Tämä suora on etsitty tangentti.



Tehtävä 2. Paraabeli on niiden (x,y-tason) pisteitten joukko, jotka ovat yhtä kaukana ns. johtosuorasta ja ns. polttopisteestä. Muodosta yhtälö paraabelille, jonka

(a) polttopiste on $(0, 1)$ ja johtosuora on $y = -1$;

(b) polttopiste on $(1, 1)$ ja johtosuoran yhtälö on $x - y - 2 = 0$.

Ratkaisu. (a) Olkoon (x, y) mielivaltainen piste paraabelilla. Kyseisen pisteen etäisyys annetusta polttopisteestä $(0, 1)$ on

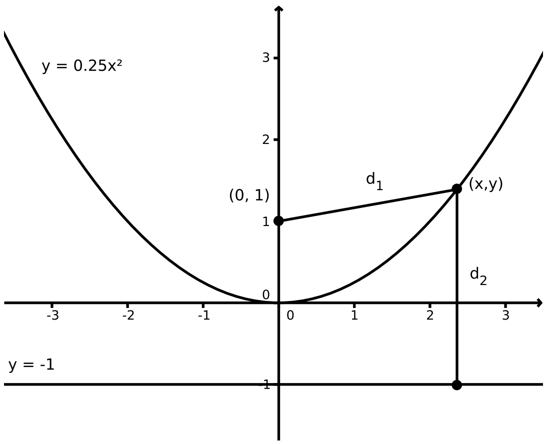
$$d_1 = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2},$$

ja etäisyys suorasta $y = -1$ on

$$d_2 = y - (-1) = y + 1.$$

Paraabelin määritelmän mukaan on oltava $d_1 = d_2$, mistä saadaan

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = y + 1 \\
\iff \quad & x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \\
\iff \quad & x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \\
\iff \quad & x^2 = 4y \\
\iff \quad & y = \frac{1}{4}x^2 \quad \text{(paraabelin yhtälö).}
\end{aligned}$$



(b) Olkoon jälleen (x, y) mielivaltainen piste paraabelilla. Etäisyys annetusta polttopisteestä $(1, 1)$ on nyt

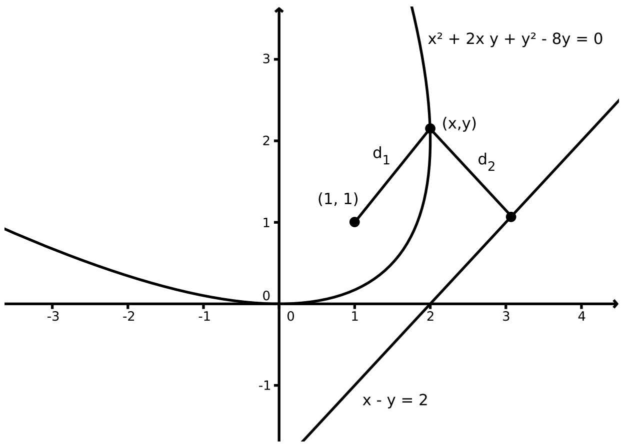
$$d_1 = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}.$$

Etäisyys suorasta $x - y - 2 = 0$ saadaan tunnetusta kaavasta:

$$d_2 = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{2}}.$$

Paraabelin määritelmän mukaan on oltava $d_1 = d_2$, mistä saadaan

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}} \\ \iff \quad & 2(x-1)^2+2(y-1)^2 = (x-y-2)^2 \\ \iff \quad & 2x^2-4x+2+2y^2-4y+2 = x^2+y^2+4-2xy-4x+4y \\ \iff \quad & x^2+2xy+y^2-8y = 0 \quad \text{(paraabelin yhtälö).} \end{aligned}$$



Tehtävä 3. Ellipsi on niiden (x,y-tason) pisteiden joukko, joiden ns. polttopisteistä mitattujen etäisyyksien summa on vakio. Johda yhtälö ellipsille, jonka polttopisteet ovat $(-1,0)$ ja $(1,0)$ ja jolle ko. etäisyyksien summa on 3.

Ratkaisu. Olkoon (x,y) mielivaltainen piste ellipsillä. Ellipsin määritelmän mukaan kyseisen pisteen polttopisteistä mitattujen etäisyyksien summa on 3, eli

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 3.$$

Korottamalla puolittain toiseen saadaan (yhtäpitävästi)

$$\begin{aligned} & (x+1)^2+y^2+2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}+(x-1)^2+y^2 = 9 \\ \iff \quad & 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 9-(x+1)^2-y^2-(x-1)^2-y^2 \\ \iff \quad & 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 7-2x^2-2y^2. \qquad (1) \end{aligned}$$

Korotetaan vielä yhtälö (1) puolittain toiseen. Yhtäpitävyys säilyy, koska molemmat puolet ovat positiivisia. Vasemmasta puolesta tulee

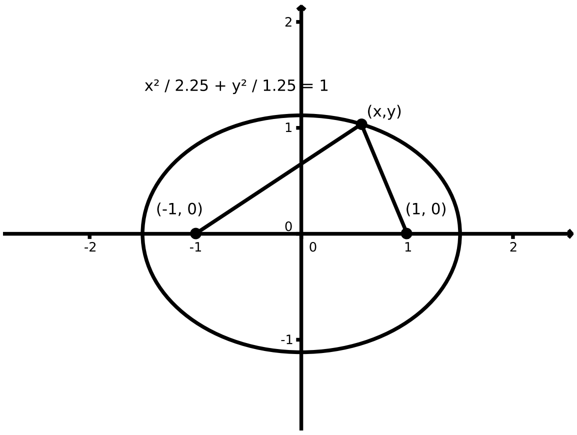
$$\begin{aligned} A &= 4\big((x+1)^2+y^2\big)\big((x-1)^2+y^2\big) \\ &= 4\big((x+1)^2(x-1)^2+(x+1)^2y^2+(x-1)^2y^2+y^4\big) \\ &= 4\big((x^2-1)^2+(x^2+2x+1)y^2+(x-2x+1)y^2+y^4\big) \\ &= 4(x^4+y^4-2x^2+1+2x^2y^2+2y^2) \\ &= 4x^4+4y^4-8x^2+4+8x^2y^2+8y^2. \end{aligned}$$

Toisaalta yhtälön (1) oikeasta puolesta tulee toiseen korotettuna

$$\begin{aligned} B &= (7 - 2x^2 - 2y^2)^2 \\ &= 49 + 4x^4 + 4y^4 - 28x^2 - 28y^2 + 8x^2y^2. \end{aligned}$$

Kun yhdistetään edelliset laskut, eli asetetaan $A = B$, saadaan

$$\begin{aligned} 4x^4 + 4y^4 - 8x^2 + 4 + 8x^2y^2 + 8y^2 &= 49 + 4x^4 + 4y^4 - 28x^2 - 28y^2 + 8x^2y^2 \\ \iff 20x^2 + 36y^2 &= 45 \\ \iff \frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{5/4} &= 1 \quad \text{(ellipsin yhtälö).} \end{aligned}$$



Tehtävä 4. Hahmottele käyrä $x^2 - y^2 = 1$. Mikä yhteys sillä on suoriin $y = x$ ja $y = -x$?

Ratkaisu. Seuraavassa kuvassa on piirretty pyydetty käyrä sekä tehtävänannossa mainitut suorat. Käyrä on hyperbeli ja näyttäisi siltä kuin suorat olisivat sen *asymptootteja* eli suoria, joita käyrä rajatta lähenee koskaan kuitenkaan leikkaamatta niitä.

Asymptoottisuus voidaan myös osoittaa täsmällisesti. Ensinnäkin käyrä $x^2 - y^2 = 1$ ei voi leikata suoria $y = \pm x$. Leikkauspisteessä (x, y) pätisi nimittäin $y = \pm x$, jolloin $y^2 = x^2$ ja $x^2 - y^2 = 0$, joten piste ei olisi käyrällä.

Olkoon toisaalta (x, y) jokin käyrällä oleva piste. Oletetaan lisäksi, että $x > 0$ ja $y > 0$, jolloin $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Nyt

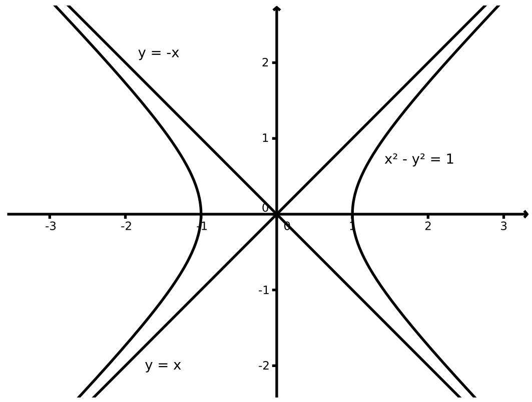
$$x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{1}{x + y}.$$

Kun x kasvaa rajatta, myös $y = \sqrt{x^2 - 1}$ kasvaa, joten edellisestä yhtälöstä voidaan päätellä, että $x - y \to 0$. Tämä tarkoittaa, että käyrällä ylöspäin ja oikealle siirryttäessä käyrän pisteet lähestyvät rajatta suoraa $y = x$.

Jos taas $x < 0$ ja $y > 0$, saadaan

$$x + y = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = -\frac{1}{-x - y} = -\frac{1}{|x| + y}.$$

Kun $|x|$ kasvaa rajatta, myös $y = \sqrt{x^2 - 1}$ kasvaa, joten saadusta yhtälöstä voidaan päätellä, että $x + y \to 0$. Tässä tapauksessa käyrä lähestyy rajatta suoraa $y = -x$. Vastaavasti voidaan käsitellä myös tapaukset, joissa $x > 0$ ja $y < 0$ tai $x < 0$ ja $y < 0$.



Tehtävä 5. Hyperbeli on niiden (x,y-tason) pisteiden joukko, joiden ns. polttopisteistä mitattujen etäisyyksien erotuksen itseisarvo on vakio. Muodosta yhtälö hyperbelille, jonka polttopisteet ovat $(-1, 0)$ ja $(1, 0)$ ja jolle ko. erotus on 1.

Ratkaisu. Olkoon (x, y) mielivaltainen piste hyperbelillä. Hyperbelin määritelmän mukaan kyseisen pisteen polttopisteistä mitattujen etäisyyksien erotuksen itseisarvo on 1, eli

$$\left|\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right| = 1.$$

Korotetaan yhtälö puolittain toiseen, jolloin saadaan (yhtäpitävästi)

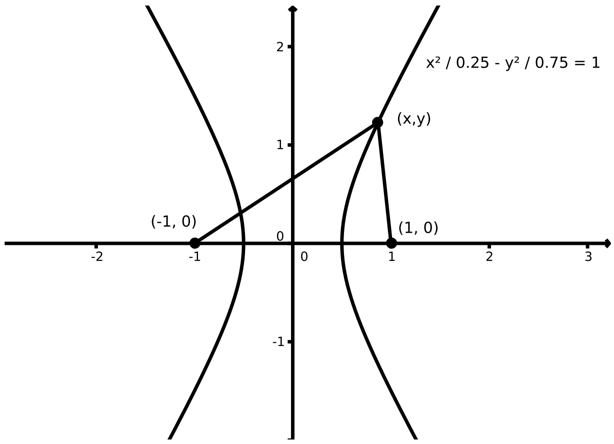
$$\begin{aligned} & (x+1)^2 - 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ \iff \quad & 2x^2 + 2y^2 + 1 = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Korotetaan edelleen puolittain toiseen. Oikea puoli on A, joka laskettiin jo edellisessä tehtävässä. Vasemmasta puolesta tulee

$$(2x^2 + 2y^2 + 1)^2 = 4x^4 + 4y^4 + 1 + 8x^2y^2 + 4x^2 + 4y^2$$

Yhdistämällä saadaan

$$\begin{aligned} 4x^4 + 4y^4 + 1 + 8x^2y^2 + 4x^2 + 4y^2 &= 4x^4 + 4y^4 - 8x^2 + 4 + 8x^2y^2 + 8y^2 \\ \iff \quad & 12x^2 - 4y^2 = 3 \\ \iff \quad & \frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{3/4} = 1 \quad \text{(hyperbelin yhtälö).} \end{aligned}$$



Tehtävä 6. Joukko K reaalilukuja on *kunta*, jos se sisältää luvut 0 ja 1 ja se on suljettu yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskun (nimittäjä ei 0) suhteen. Osoita, että joukko

$$\{r + s\sqrt{2} \mid r, s \text{ rationaalilukuja}\}$$

on kunta.

Todistus. Merkitään tehtävänannon joukkoa K. Ainakin reaaliluvut 0 ja 1 löytyvät joukosta K, sillä

$$0 = 0 + 0\sqrt{2} \quad \text{ja} \quad 1 = 1 + 0\sqrt{2},$$

ja luvut 0 ja 1 ovat rationaalilukuja.

Osoitetaan sitten, että joukko K on suljettu tarvittavien laskutoimitusten suhteen. Olkoot sitä varten x ja y joukossa K. Tällöin $x = a + b\sqrt{2}$ ja $y = c + d\sqrt{2}$ joillakin rationaaliluvuilla a, b, c, d.

Yhteenlasku:

$$x + y = a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2} = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}.$$

Koska $a + c$ ja $b + d$ ovat rationaalilukuja, on näytetty, että $x + y$ on joukossa K. Siispä K on yhteenlaskun suhteen suljettu.

Vähennyslasku:

$$x - y = (a + b\sqrt{2}) - (c + d\sqrt{2}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2}.$$

Koska $a - c$ ja $b - d$ ovat rationaalilukuja, on näytetty, että $x - y$ on joukossa K. Siispä K on vähennyslaskun suhteen suljettu.

Kertolasku:

$$xy = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Koska $ac + 2bd$ ja $ad + bc$ ovat rationaalilukuja, on näytetty, että xy on joukossa K. Siispä K on kertolaskun suhteen suljettu.

Jakolasku: Tässä on oletettava, että $y \neq 0$. Toisin sanoen joko $c \neq 0$ tai $d \neq 0$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} &= \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})} = \frac{ac-ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}-2bd}{c^2-2d^2} \\ &= \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Koska luvut $\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}$ ja $\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}$ ovat rationaalilukuja, on näytetty, että x/y on joukossa K. Siispä K on jakolaskun suhteen suljettu.

Koska joukko K on suljettu suljettu neljän peruslaskutoimituksen suhteen ja sisältää luvut 0 ja 1, se on kunta. $\square$

Tehtävä 7. (Tehtävänantoa muokattiin jälkeenpäin.) Osoita, että luvun $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ käänteisalkio on joukossa

$$K = \{r + s\sqrt[3]{2} + t\sqrt[3]{4} \mid r,\ s \text{ ja } t \text{ rationaalilukuja}\}.$$

Todistus. Merkitään $x = \sqrt[3]{2}$. Tarkoitus on siis löytää luku y, jolle pätee $(1+x+x^2)y = 1$ ja joka on lisäksi muotoa $y = r+sx+tx^2$ joillakin rationaaliluvuilla r, s, t. Tästä saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2)(r+sx+tx^2) = 1 \\ \iff \quad & r + (r+s)x + (r+s+t)x^2 + (s+t)x^3 + tx^4 = 1. \end{aligned}$$

Koska $x^3 = 2$ ja $x^4 = 2x$, edellinen yhtälö sievenee muotoon

$$(r+2s+2t) + (r+s+2t)x + (r+s+t)x^2 = 1.$$

Tälle löytyy ratkaisu, jos voidaan ratkaista yhtälöryhmä

$$\begin{cases} r+2s+2t &= 1 \\ r+s+2t &= 0 \\ r+s+t &= 0 \end{cases}$$

(Itse asiassa tämä on ainoa tapa ratkaista ko. yhtälö, mutta sitä tietoa ei tarvita tässä.) Yhtälöryhmän ratkaisu saadaan helposti, ja se on $r=-1$, $s=1$, $t=0$. Käänteisalkioksi tulee siis $x-1 = \sqrt[2]{2}-1$. Tämä luku on joukossa K.

Tarkistetaan vielä:

$$(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{2}-1) = \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2-1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4} = 1. \qquad \square$$

Huom. Alkuperäisessä tehtävänannossa pyydettiin osoittamaan, että joukko K on itse asiassa kunta. Tällöin olisi muun muassa osoitettava, että jokaisella joukon K alkiolla on käänteisalkio (jotta K olisi suljettu jakolaskun suhteen). Tämä olisi toki mahdollista tehdä samaan tapaan kuin yllä olevassa ratkaisussa, mutta laskut olisivat työläitä. Abstraktissa algebrassa (esim. kurssilla Algebra II) käänteisalkioiden olemassaolon osoittamiseen kehitetään tehokkaampia keinoja.

Tehtävä 8. Määritä suppein kunta, joka sisältää luvut $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$.

Ratkaisu. Tehtävässä sai olettaa tunnetuksi, että jos reaalilukujoukko F on kunta ja $f \in F$, niin myös joukko

$$F(\sqrt{f}) = \{a + b\sqrt{f} \mid a, b \in F\}$$

on kunta. Tätä kutsutaan F:n neliöjuurilaajennokseksi. Tehtävän ratkaisu löytyy laajentamalla rationaalilukujen kuntaa peräkkäin luvuilla $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$.

Todetaan ensin, että $F(\sqrt{f})$ on itse asiassa suppein kunta, joka sisältää kunnan F sekä luvun $\sqrt{f}$. Selvästikin kunta F ja luku $\sqrt{f}$ sisältyvät kuntaan $F(\sqrt{f})$, mutta miksi tämä olisi suppein mahdollinen? Olkoon K jokin toinen kunta, joka sisältää kunnan F sekä luvun $\sqrt{f}$. Tällöin K on suljettu kerto- ja yhteenlaskun suhteen, joten myös luku $a + b\sqrt{f}$ on kunnassa K kaikilla $a, b \in F$. Tämä tarkoittaa, että $F(\sqrt{f}) \subset K$. Kunta $F(\sqrt{f})$ siis sisältyy jokaiseen kunnan F ja luvun $\sqrt{f}$ sisältävään kuntaan, joten se on suppein tällainen kunta.

Tunnetusti rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on kunta. Laajennetaan sitä ensin luvulla $\sqrt{2}$:

$$K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Laajennetaan näin syntynyttä kuntaa vielä luvulla $\sqrt{3}$:

$$K_2 = K_1(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in K_1\}.$$

Osoitetaan, että K_2 on suppein kunta, joka sisältää luvut $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$. Ensinnäkin K_2 on kunta, joka sisältää kunnan K_1 sekä luvun $\sqrt{3}$, ja koska K_1 sisältää luvun $\sqrt{2}$, nähdään, että K_2 itse asiassa sisältää molemmat vaaditut luvut.

Osoitetaan vielä suppeimmuusominaisuus. Olkoon K jokin kunta, joka sisältää luvut $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$. Näytetään, että $K_2 \subset K$. Ensinnäkin kunnan K on sisällettävä luvut 1 ja 0 sekä oltava suljettu peruslaskutoimitusten suhteen, joten sen täytyy sisältää kaikki rationaaliluvut. Koska K_1 on suppein kunta, joka sisältää kunnan $\mathbb{Q}$ sekä luvun $\sqrt{2}$, täytyy päteä $K_1 \subset K$. Toisaalta K_2 on suppein kunta, joka sisältää kunnan K_1 sekä luvun $\sqrt{3}$, joten täytyy päteä $K_2 \subset K$. Täten K_2 on suppeampi kuin K (voi myös olla $K_2 = K$).

Katsotaan vielä, minkälaisia alkioita kunta K_2 sisältää. Voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
K_2 &= \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in K_1\} \\
&= \{(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})\sqrt{3} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\} \\
&= \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}.
\end{aligned}$$

Vaadittujen lukujen $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$ lisäksi on kuntaan siis otettava myös näiden tulo $\sqrt{6}$.