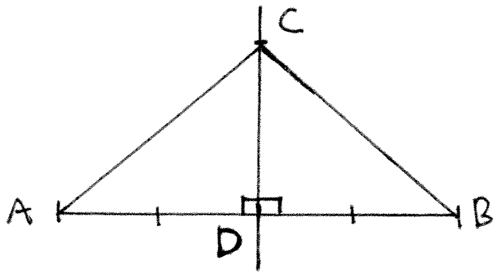
Geometria 2013

Harjoitus 2

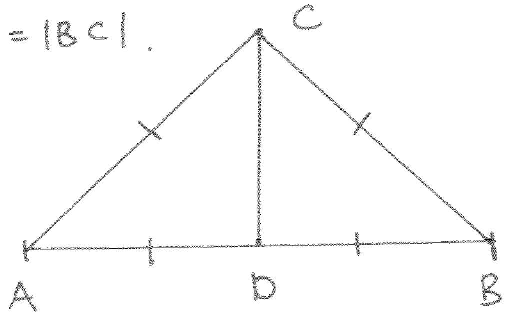
Ratkaisut (Jokke Häsä)

1. Oletetaan, että piste C on janan AB keskinormaalilla, joka kulkee janan pisteen D kautta.



Tällöin $|AD| = |DB|$, koska D on janan AB keskipiste. Lisäksi kulmat ADC ja BDC ovat suoria. Kolmioissa ADC ja BDC on siis yhteinen sivu CD, yhtä pitkät sivut AD ja BD sekä näiden välissä yhtä suuret (suorat) kulmat. Kolmioiden yhtenevyyslauseen (SKS) perusteella kolmiot ovat yhteneväť, joten myös sivut AC ja CB ovat yhtä pitkät. Täten piste C on yhtä kaukana janan päätepisteistä.

Oletetaan sitten, että piste C on yhtä kaukana janan AB päätepisteistä eli $|AC| = |BC|$.



Piirretään pisteestä C keskijana janalle AB. Tällöin $|AD| = |DB|$, missä D on janan AB keskipiste. Kolmioilla ADC ja BDC on nyt keskenään samanpituiset

→

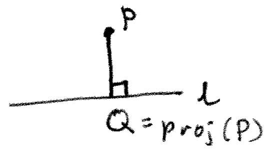
sivut, joten kolmioiden yhtenevyyslauseen (sss) perusteella ne ovat yhtenevät. Täten myös kulmat ADC ja BDC ovat yhtä suuret. Koska lisäksi

$\sphericalangle ADC + \sphericalangle BDC = 180°$, voidaan päätellä, että

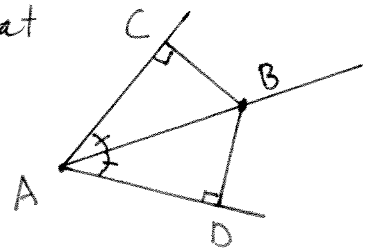
$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90°$. Näin ollen jana DC yhtyy janan AB keskinormaaliin, joten piste C on ko. keskinormaalilla.

$\square$

2. Oletetaan tunnetuksi, että pisteen etäisyys suorasta on sama kuin sen etäisyys kohtisuorasta projektiostaan ko. suoralle. (Tämä on minimietäisyys Pythagoraan lauseen perusteella.)



Oletetaan, että piste B on kulman A puolittajalla. Piirretään pisteestä B kohtisuorat kulman kyljille, ja oletetaan, että ne leikkaavat nuo kyljet pisteissä C ja D.

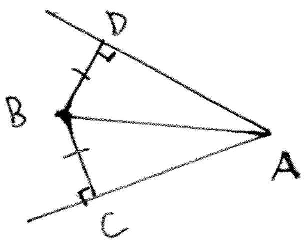


Nyt kolmioissa CAB ja DAB on yhteinen sivu AB, yhtä suuret kulmat CAB ja DAB sekä yhtä suuret (suorat) kulmat ACB ja ADB. Kolmioiden yhtenevyyslauseen (KKS) perusteella kolmiot ovat yhtenevät, joten myös sivut CD ja BD ovat yhtä pitkät. Täten pisteen B (kohtisuorat) etäisyydet kulman kyljistä ovat samat.

→

(2. jatkuu)

Oletetaan sitten, että pisteen B etäisyydet kulman A kyljistä ovat samat. Olkoot C ja D kuten edellä,

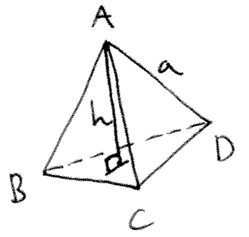


jolloin $|BC| = |BD|$. Nyt kolmioissa ABC ja ABD on yhteinen sivu AB, yhtä pitkät sivut BC ja BD sekä yhtä suuret (suorat) kulmat ACB ja ADB. Lisäksi kolmiot ovat suorakulmaisia, joten niissä ei voi olla tylppää kulmaa. Täten kolmioiden yhtenevyyslauseesta (SSK) seuraa, että kolmiot ovat yhtenevät. Siispä myös kulmat BAC ja BAD ovat yhtä suuret, mikä tarkoittaa, että piste B on kulman CAD puolittajalla.

□

HARPPI–VIIVAINKONSTRUKTIOIDEN RATKAISUT ILMESTYVÄT ERIKSEEN.

5.

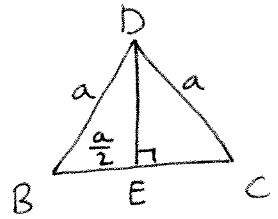


• Käytetään kartion ~~pinta-alan~~ tilavuuden kaavaa:

$$V = \frac{1}{3}hA,$$

missä h on tetraedrin korkeusjanan pituus (saadaan tehtävästä 6) ja A on pohjan ala.

• Kartion (tetraedrin) pohjana on tasakylkinen kolmio, jonka sivun pituus on a.

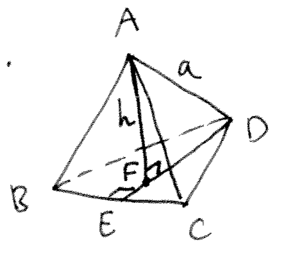


• Pythagoraan lauseen mukaan $|DE|^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$, josta $|DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

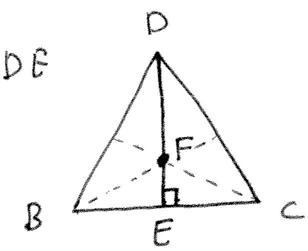
• Pohjan ala on siis $\frac{1}{2}\cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \underline{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}$.

• Tetraedrin tilavuus on $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}}$.

6.

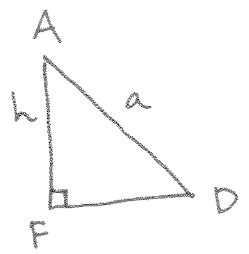


• Kolmiossa BCD korkeusjanan DE pituus $|DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (laskettiin ed. tehtävässä).



• Kolmion BCD korkeusjana on myös sen keskijana, ja tilanteen symmetrian vuoksi piste F on keskijanojen leikkauspiste.

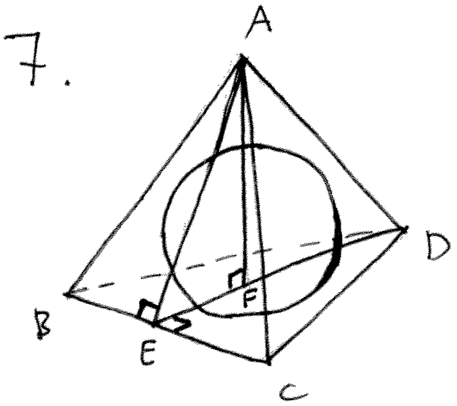
• Keskijanojen leikkauspiste jakaa keskijanat suhteessa 1 : 2, joten $|DF| = \frac{2}{3}|DE| = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}a}$.



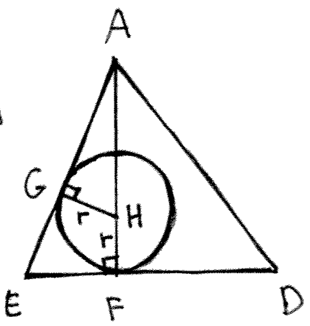
• Pythagoraan lauseen nojalla tetraedrin korkeus on $h = \sqrt{a^2 - |DF|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2}$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a}}.$$

7.



• Kolmiot AHG ja AEF ovat yhdenmuotoiset, sillä niillä on sama kulma pisteessä A ja ne ovat suorakulmaiset.



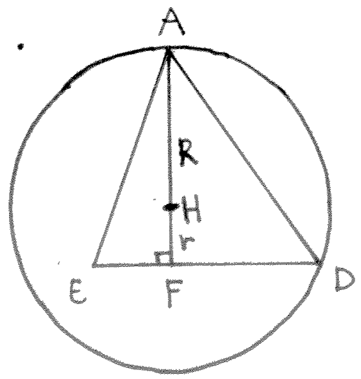
• Em. kolmioissa lyhemmän kateetin suhde hypotenuusaan antaa verrannon $\cancel{\frac{r}{|AF|-|AH|}}$ $\frac{r}{|AF|-r} = \frac{|EF|}{|AE|}$, josta

$$\underline{r = \frac{|EF|\cdot|AF|}{|AE|+|EF|}}.$$

• Tehtävien 5 ja 6 perusteella $|AF| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$, $|AE| = |DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ja $|EF| = |DE| - |DF| = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{\sqrt{3}}a = \frac{1}{2\sqrt{3}}a$.

• Siispä $r = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{3}}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2\sqrt{3}}a} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{6}}{\frac{4}{2\sqrt{3}}}a = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{12}a}}.$

8.



• Symmetrian vuoksi tetraedrin sisään- ja ympäripiirretyillä ~~ympyröillä~~ palloilla on sama keskipiste.

• Kun tarkastellaan samaa kolmiota kuin ed. tehtävässä, nähdään, että ympäri-piirretyn ~~ymp~~ pallon säde R on |AH|.

• Säde on siis $R = |AF| - r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a - \frac{\sqrt{6}}{12}a = \frac{4\sqrt{6}}{12}a - \frac{\sqrt{6}}{12}a$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{4}a}}.$$

☆