

Tehtävä 4. Määritä harpin ja viivaimen avulla annetulta janalta piste, joka jakaa janan kahden muun janan pituuksien suhteessa.

Ratkaisu. Olkoon annettu jana AB , joka halutaan jakaa, sekä kaksi muuta janaa, joiden pituudet a ja b tunnetaan. Kun puhutaan pituuksien suhteista, ratkaisun avain ovat yleensä yhdenmuotoiset kolmiot. Yritetään muodostaa yhdenmuotoiset kolmiot, joista toinen liittyy joteenkin janaan AB ja toinen pituuksiin a ja b .

Oletetaan, että etsitty piste jakaa janan AB siten, että osien pituuksiksi tulee x ja y . Emme voi suoraan pyrkiä toteuttamaan verrantoa

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}, \quad (1)$$

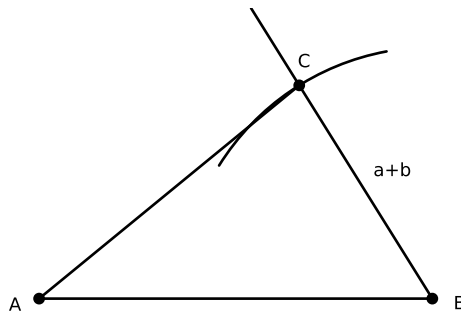
sillä emme tiedä mitään osista x ja y . Sen sijaan niiden summan $x + y$ tunnemme: se on janan AB pituus. Verrannosta (1) seuraa kuitenkin (lisäämällä puolittain luku 1) myös

$$\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}. \quad (2)$$

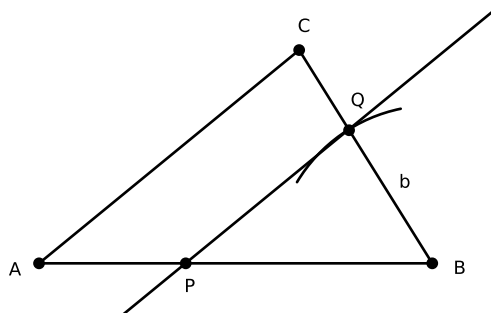
Tätä voimme lähteä hakemaan yhdenmuotoisten kolmioiden avulla.

Ideana on muodostaa ensin kolmio, jonka eräs sivu on jana AB (pituus $x + y$) ja toisen sivun AC pituus on $a + b$. Sen jälkeen piirretään tämän kanssa yhdenmuotoinen kolmio, jonka sivua AC vastaavan sivun pituus on b . Verrannon (2) ansiosta sivua AB vastaavan sivun pituudeksi tulee silloin y .

Aloitetaan piirtämällä pisteeseen B mielivaltaisen kulma toisena kylkenään jana AB . Erotetaan toiselta kyljeltä jana BC , jonka pituus on $a + b$, ja täydennetään kuvio kolmioksi.



Erotetaan suoralta BC myös jana AQ , jonka pituus on b , ja piirretään pisteen Q kautta sivun AC kanssa yhdensuuntainen suora. (Yhdensuuntaisen suoran piirto-ohje on Väisälän kirjan pykälässä 19 §.) Olkoon P piste, jossa viimeksi mainittu suora leikkaa sivun AB .



Nyt kolmioilla ABC ja PBQ on yhteinen kulma ABC . Lisäksi kulmat BCA ja BQP ovat samat, sillä ne ovat samankohtaiset kulmat yhdensuuntaisten suorien AC ja PQ leikatessa sivua BC . Täten kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Jos siis merkitään janan AP pituutta x ja janan PB pituutta y , verranto (2) toteutuu, ja silloin toteutuu myös verranto (1). Piste P on siis etsitty piste.

