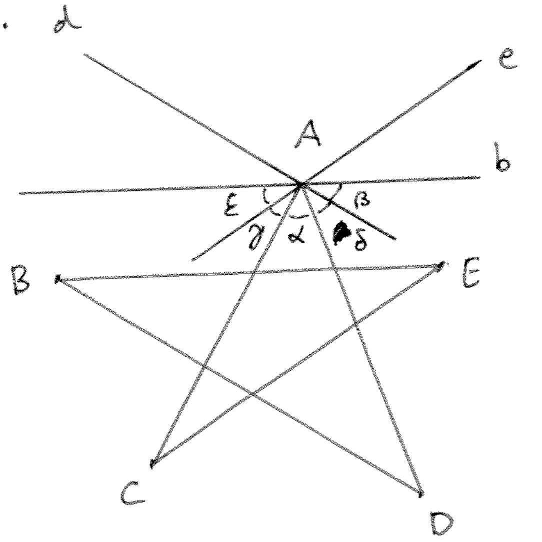
Geometria 2013

Harjoitus 1

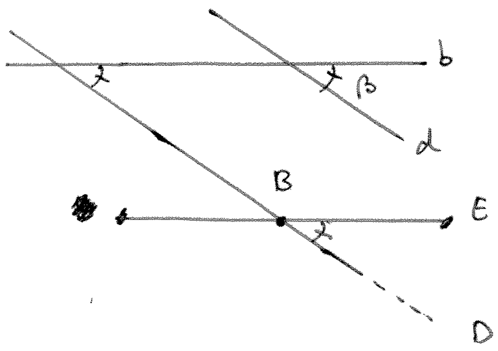
Ratkaisut (Jokke Häsä)

1.



- Piirretään kärjen A kautta suorat niin, että $b \parallel BE$, $e \parallel EC$ ja $d \parallel DB$.

- Nyt $\sphericalangle\beta = \sphericalangle EBD$, sillä $b \parallel BE$ ja $d \parallel DB$ ja yhdensuuntaisten suorien leikatessa samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

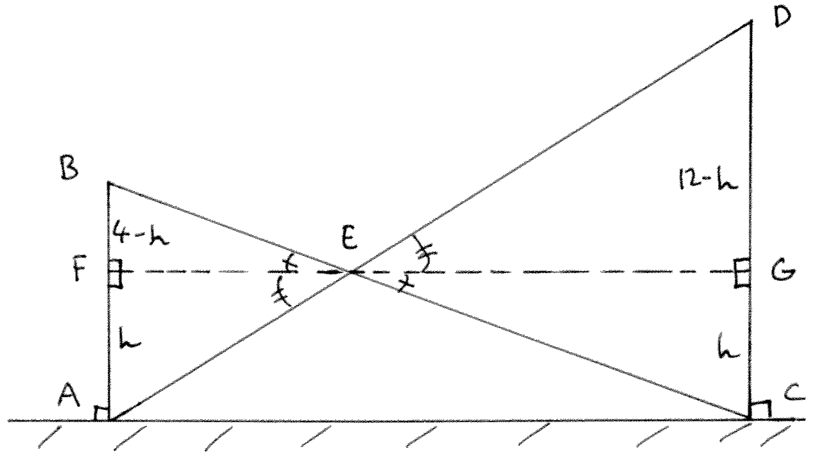


- Samoin voidaan päätellä, että $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle ACE$, $\sphericalangle\delta = \sphericalangle ADB$ ja $\sphericalangle\varepsilon = BEC$.

- Täten $\sphericalangle CAD + \sphericalangle EBD + \sphericalangle ACE + \sphericalangle ADB + \sphericalangle BEC = \sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma + \sphericalangle\delta + \sphericalangle\varepsilon = 180°$.

□

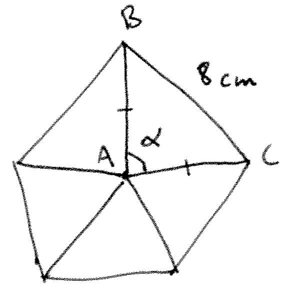
2.



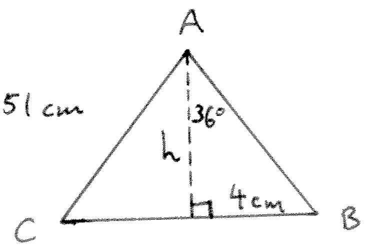
- Kulmat BEF ja GEC ovat ristikulmina yhtä suuret, samoin FEA ja DEG.
- Täten suorakulmaiset kolmiot BEF ja GEC ovat yhdenmuotoiset, samoin kolmiot FEA ja DEG.

- Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinosien suhteet ovat samat, joten $\dfrac{h}{12-h} = \dfrac{|FE|}{|GE|} = \dfrac{4-h}{h}$.
- Saadaan yhtälö $\dfrac{h}{12-h} = \dfrac{4-h}{h}$, josta $\underline{\underline{h = 3\,m}}$.

3.



- Kolmio ABC on tasakylkinen; huippukulma $\alpha = 360°/5 = 72°$.

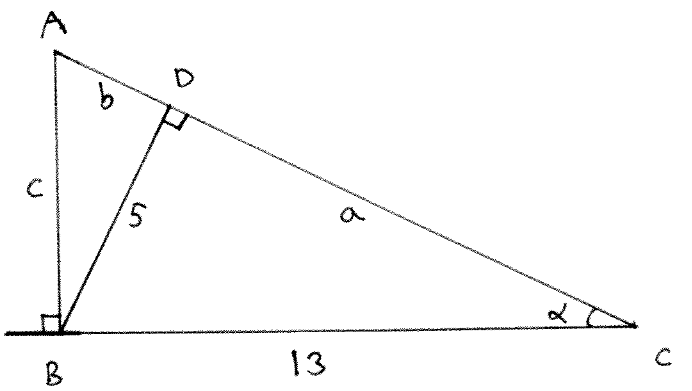


- Kolmiosta: $h = \dfrac{4\,cm}{\tan 36°} \approx 5{,}51\,cm$

ja ala $= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5{,}51\,cm^2$.

- Viisikulmion ala on $5 \cdot 4 \cdot 5{,}51\,cm^2 \approx \underline{\underline{110\,cm^2}}$.

4.



- Pythagoraan lause:

$$a^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$
$$\Rightarrow \underline{a = 12}.$$

- Kulma α on yhteinen suorakulmaisille kolmioille BCD ja ACB, joten ko. kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

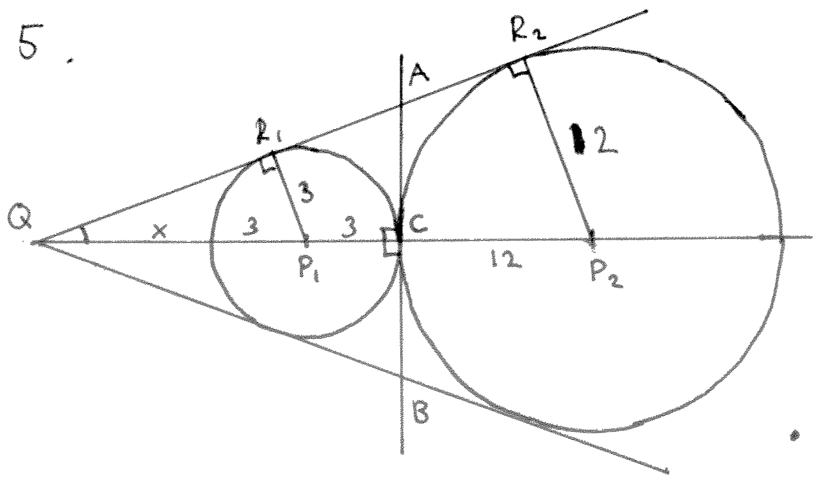
- Näiden kolmioiden kateettien suhteet ovat $\frac{5}{a}$ ja $\frac{c}{13}$.

  Yhdenmuotoisuus: $\frac{5}{a} = \frac{c}{13} \Rightarrow c = \frac{65}{a} = \underline{\underline{\frac{65}{12}}}$.

- Toisaalta pidemmän kateetin suhde hypotenuusaan on em. kolmioissa $\frac{a}{13}$ ja $\frac{13}{a+b}$, joten $\frac{a}{13} = \frac{13}{a+b}$, josta

  $a+b = \frac{169}{a} = \underline{\underline{\frac{169}{12}}}$.

5.



- On selvitettävä kolmion AQB pinta-ala. Korkeus on $x+6$, kanta janan AB pituus.

- Ympyrän tangentti on suorassa kulmassa sädettä vastaan.

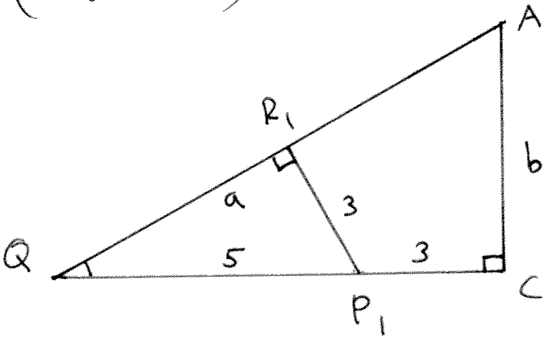
- Suorakulmaiset kolmiot P_1QR_1 ja P_2QR_2 ovat yhdenmuotoiset,

  joten $\frac{x+3}{3} = \frac{x+18}{12}$ (hypotenuusan suhde lyhyempään kateettiin).

- Tästä saadaan $\underline{x = 2}$.

→

(5 jatkuu)



- Suorakulmaiset kolmiot R_1QP_1 ja CQA ovat yhdenmuotoiset.

- Pythagoras: $a^2 = 5^2 - 3^2 = 16$

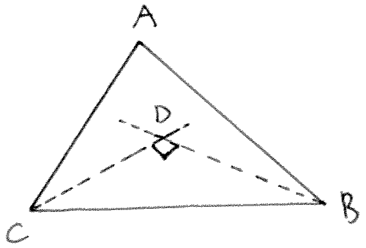
  $\Rightarrow \underline{a = 4}$.

- Kolmioissa R_1QP_1 ja CQA pätee kateettien suhteille

  $\frac{3}{a} = \frac{b}{8}$, josta $b = \frac{24}{a} = \frac{24}{4} = \underline{6}$.

- Kolmion AQB ala on $\frac{1}{2} \cdot 2b \cdot (x+6) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = \underline{\underline{48}}$.

6. Osoitetaan, että kolmiossa ei voi olla kahtaa keskenään kohtisuoraa kulman puolittajaa. Tehdään vastaoletus:



kolmiossa ABC kulmanpuolittajien CD ja BD välinen kulma on suora. (Puolittajat leikkaavat pisteessä D.)

Koska kolmion kulmien summa on $180°$, tiedetään, että

$\angle BCD + \angle CBD = 180° - 90° = 90°$. Tästä seuraa, että

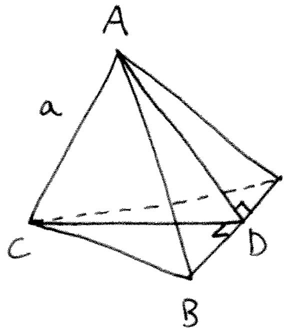
$\angle BCA + \angle CBA = 2 \cdot \angle BCD + 2 \cdot \angle CBD = 2 \cdot 90° = 180°$.

Tämä on ristiriita, sillä tällöin kulma CAB olisi nollakulma.

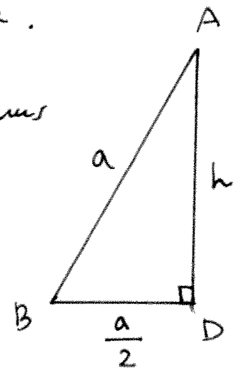
Siis vastaoletus on väärä ja alkuperäinen väite pätee.

□

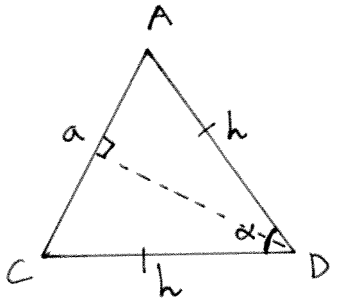
7.



• Olkoon tetraedrin särmä a.



• Kolmiossa ABD sivun AD pituus on $h = \frac{\sqrt{3}\,a}{2}$.

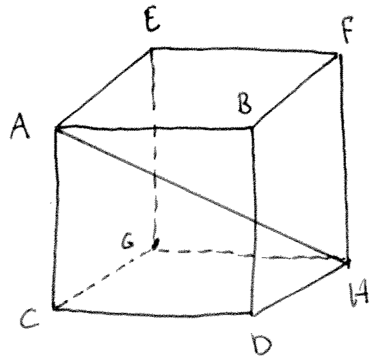


• Kolmio ADC on tasakylkinen. Huippukulma α on kysytty tahkojen välinen kulma.

• $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{a/2}{\sqrt{3}\,a/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

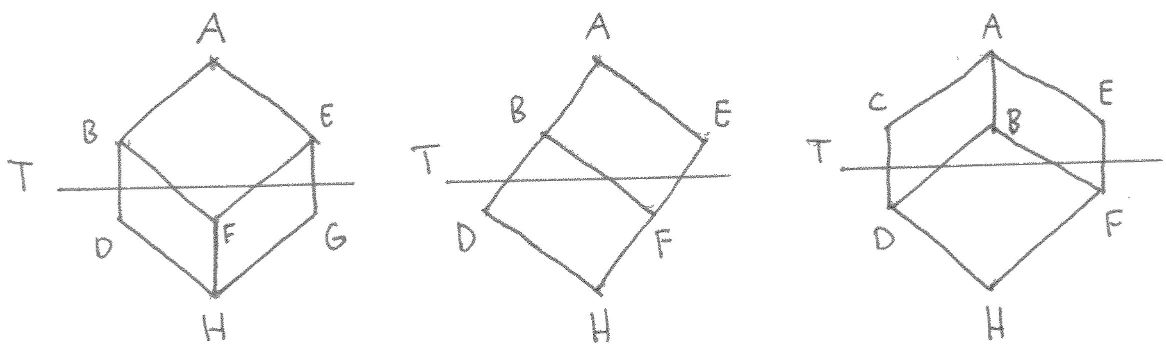
Tästä saadaan laskimella $\alpha \approx 70{,}53°$.

8.



• Avaruuslävistäjä AH.

• Alla olevissa kuvissa kuutio on kärjellään ja projisoitu sivusta. Avaruuslävistäjä on pystysuorassa, ja sitä vastaan kohtisuora taso T on horisontin tasossa.



• Symmetrian perusteella nähdään, että taso T leikkaa kuution särmät BD, BF, FE, EG, GC ja CD niiden keskipisteissä.

→

- Leikkauskuvioksi tulee säännöllinen kuusikulmio, jonka sivun pituus on $b = \sqrt{(a/2)^2 + (a/2)^2}$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}.$$