Geometria 2013
Harjoitus 11
Ratkaisuehdotuksia (Jokke Häsä)

Tehtävä 1. (Pitkän matematiikan kevään 2013 ylioppilaskokeen tehtävä 7.) Pisteiden $A(2,0,1)$ ja $B(3,1,3)$ yhdysjanan keskipisteen kautta asetetaan taso, joka on kohtisuorassa yhdysjanaa vastaan. Missä pisteessä tämä taso leikkaa y-akselin?

Ratkaisu. Pisteiden $A(2,0,1)$ ja $B(3,1,3)$ yhdysjanaa kuvaa vektori $\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Yhdysjanan keskipisteen C paikkavektori on siis

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2\mathbf{i} + \mathbf{k}) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) = \frac{5}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Tason normaalimuotoinen yhtälö on muotoa

$$(\bar{x} - \bar{c}) \cdot \bar{n} = 0,$$

missä $\bar{c}$ on jonkin tason pisteen paikkavektori ja $\bar{n}$ on tason jokin normaalivektori. Tällöin nimittäin $\bar{x}$ on tason pisteen paikkavektori täsmälleen silloin, kun vektori $\bar{x} - \bar{a}$ on tason suuntainen eli kohtisuorassa normaalivektoria $\bar{n}$ vastaan. Valitsemalla $\bar{c} = \overrightarrow{OC}$ ja $\bar{n} = \overrightarrow{AB}$ tason yhtälöksi saataisiin

$$x + y + 2z = 7$$

Y-akselin pisteiden x- ja z-koordinaatit ovat nollia, joten tason yhtälöstä saataisiin ratkaistua leikkauspisteeksi $(0,7,0)$.

Tehtävä voidaan kuitenkin ratkaista myös ilman tason yhtälöä. Merkitään kysyttyä leikkauspistettä $X = (0,y,0)$. Koska sekä piste C että piste X ovat tasossa, vektori $\overrightarrow{CX}$ kulkee tasoa pitkin. Siispä se on kohtisuorassa vektoria $\overrightarrow{AB}$ vastaan. Tästä saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{5}{2}\mathbf{i} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\right) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ &= -\frac{5}{2} + y - \frac{1}{2} - 4 = y - 7. \end{aligned}$$

Tästä saadaan $y = 7$, joten kysytty leikkauspiste on $(0,7,0)$.

Tehtävä 2. (Pitkän matematiikan kevään 2013 ylioppilaskokeen tehtävä 15 käsiteltynä niin, että lähdetään pisteeseen (a, a^2) asetetusta tangentista ja sen normaalista.)

a) Ympyrä, jonka säde on $r > \frac{1}{2}$, asetetaan paraabelin $y = x^2$ sisäpuolelle alla olevan kuvan mukaisesti. Näytä, että ympyrän keskipisteen y-koordinaatti on $r^2 + \frac{1}{4}$.

b) Ympyrä C_1 saadaan valitsemalla a-kohdassa $r = r_1 = 1$. Sitä sivuamaan asetetaan toinen ympyrä C_2, joka sivuaa myös paraabelia. Jatkamalla näin saadaan alla olevan kuvan mukainen jono ympyröitä $C_1, C_2, C_3, \ldots$. Määritä ympyrän C_2 säde r_2.

c) Osoita, että peräkkäisten ympyröiden C_n ja C_{n+1} säteet r_n ja r_{n+1} toteuttavat rekursiokaavan $(r_{n+1})^2 - r_{n+1} = (r_n)^2 + r_n$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

d) Osoita c-kohdan avulla, että $r_{n+1} = r_n + 1$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ratkaisu. a) Olkoon $P = (a, a^2)$ piste, jossa ympyrä sivuaa paraabelia. Tuohon pisteeseen piirretyn paraabelin sivuajan kulmakerroin saadaan derivoimalla $D\,x^2 = 2x$, ja se on $2a$. Vastaavan normaalin kulmakerroin on tällöin $-\frac{1}{2a}$. Ympyrän keskipisteen y-koordinaatti saadaan lisäämällä pisteen P y-koordinaattiin matka, jonka verran normaali nousee siirryttäessä pisteen P x-koordinaatin verran vasemmalle (ks. kuva). Näin ollen y-koordinaatti on

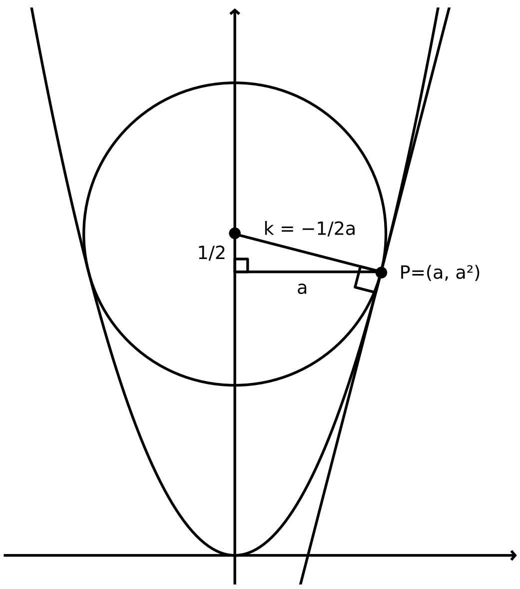
$$y = a^2 + \frac{1}{2a} \cdot a = a^2 + \frac{1}{2}.$$

Toisaalta ympyrän säteen neliö saadaan Pythagoraan lauseesta:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{4}.$$

Nämä tiedot yhdistämällä saadaan lopulta

$$y = \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = r^2 + \frac{1}{4}.$$



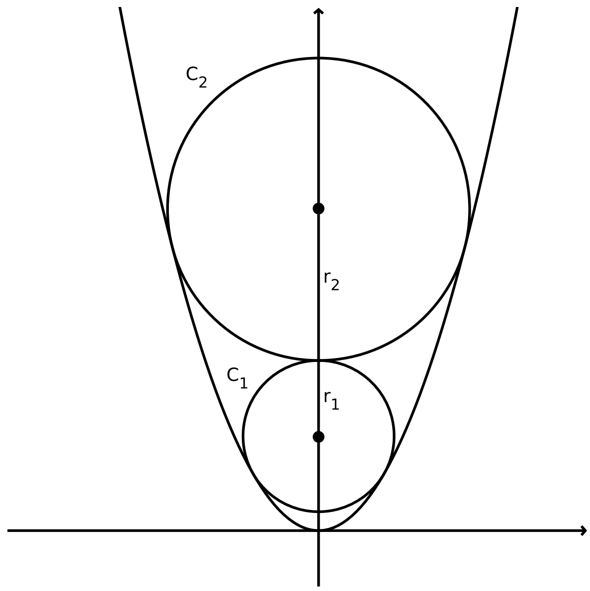
b) Ympyröiden C_2 ja C_1 keskipisteiden välimatka on $r_2 + r_1 = r_2 + 1$. Toisaalta se on myös keskipisteiden y-koordinaattien y_2 ja y_1 erotus, ja a-kohdan mukaan

$$y_2 - y_1 = \left(r_2^2 + \frac{1}{4}\right) - \left(r_1^2 + \frac{1}{4}\right) = r_2^2 - r_1^2 = r_2^2 - 1.$$

Saadaan siis yhtälö

$$r_2 + 1 = r_2^2 - 1 = (r_2 + 1)(r_2 - 1),$$

josta ratkeaa helposti $r_2 = 2$.



c) Aivan kuten b-kohdassa, peräkkäisten ympyröiden keskipisteiden välimatka on toisaalta $r_{n+1} + r_n$ ja toisaalta $(r_{n+1})^2 - (r_n)^2$. Saadaan yhtälö

$$r_{n+1} + r_n = (r_{n+1})^2 - (r_n)^2,$$

josta

$$(r_{n+1})^2 - r_{n+1} = (r_n)^2 + r_n.$$

d) Täydennetään c-kohdassa johdetun yhtälön vasen puoli neliöksi:

$$(r_{n+1})^2 - r_{n+1} = \left((r_{n+1})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r_{n+1} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = \left(r_{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Oikeasta puolesta tulee vastaavasti

$$(r_n)^2 + r_n = \left(r_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Nyt c-kohdan yhtälöstä voidaan johtaa

$$\begin{aligned}\left(r_{n+1}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}&=\left(r_n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\\ \left(r_{n+1}-\frac{1}{2}\right)^2&=\left(r_n+\frac{1}{2}\right)^2\\ r_{n+1}-\frac{1}{2}&=\pm\left(r_n+\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Tässä negatiivinen juuri ei käy, koska $r_{n+1} > 1/2$, joten

$$\begin{aligned}r_{n+1}-\frac{1}{2}&=r_n+\frac{1}{2}\\ r_{n+1}&=r_n+1.\end{aligned}$$

Lisähuomio. Koska $r_1 = 1$, induktiolla voitaisiin osoittaa, että $r_n = n$ kaikilla n.

Tehtävä 3. Paraabelin $y = f(x) = x^2$ kaarevuutta origossa voidaan tutkia seuraavalla ns. sivuavien ympyröiden menetelmällä. Menetelmä perustuu siihen, että pisteiden $(0, 0)$, $(-t, t^2)$ ja (t, t^2) kautta kulkee yksikäsitteinen ympyrän kehä.

a) Määritä tämän ympyrän säde $R(t)$.

b) Laske ”rajaympyrän” säde $R_0 = \lim_{t\to 0+} R(t)$. Tätä kutsutaan paraabelin *kaarevuussäteeksi* origossa.

c) Johda lauseke funktiolle $g(x)$, jonka kuvaaja on rajaympyrän alapuoli.

d) Näytä, että $g''(0) = f''(0) = 1/R_0$. Tämä on paraabelin *kaarevuus* origossa.

Ratkaisu. a) Ympyrän keskipiste (a, b) on yhtä etäällä pisteistä $O = (0, 0)$, $A = (-t, t^2)$ ja $B = (t, t^2)$, missä $t > 0$. Saadaan yhtälöt

$$x^2 + y^2 = (x + t)^2 + (y - t^2)^2 = (x - t)^2 + (y - t^2)^2.$$

Vasemmasta yhtälöstä voidaan johtaa

$$\begin{aligned}&x^2 + y^2 = (x + t)^2 + (y - t^2)^2\\ \iff\quad &x^2 + y^2 = x^2 + 2xt + t^2 + y^2 - 2yt^2 + t^4\\ \iff\quad &-2x + 2yt = t + t^3. \qquad (1)\end{aligned}$$

Samoin saadaan

$$\begin{aligned}&x^2 + y^2 = (x - t)^2 + (y - t^2)^2\\ \iff\quad &x^2 + y^2 = x^2 - 2xt + t^2 + y^2 - 2yt^2 + t^4\\ \iff\quad &2x + 2yt = t + t^3. \qquad (2)\end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälöistä (1) ja (2) muodostettu yhtälöpari:

$$\begin{cases} -2x + 2yt &= t + t^3 \\ 2x + 2yt &= t + t^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

Ympyrän keskipiste on siis $\left(0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^2\right)$ ja sen säde on keskipisteen etäisyys origosta eli $R(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t^2$.

b) Rajaympyrän säde on

$$R_0 = \lim_{t \to 0+} R(t) = \lim_{t \to 0+} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^2\right) = \frac{1}{2}.$$

c) Edellisten kohtien perusteella rajaympyrän säde on $1/2$ ja keskipiste $(0, 1/2)$. Sen yhtälö on siis $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$. Tästä voidaan ratkaista y:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} + \frac{1}{2}.$$

Neliöjuuren edessä oleva $+$-merkki kuvaa ympyrän yläpuolta ja $-$-merkki alapuolta. Kysytty funktio on siis

$$g(x) = -\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} + \frac{1}{2}.$$

d) Derivoidaan funktio $g(x) = -(1/4 - x^2)^{1/2} + 1/2$ kahdesti:

$$g'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - x^2\right)^{-1/2}(-2x) = x\left(\frac{1}{4} - x^2\right)^{-1/2}$$

ja

$$\begin{aligned} g''(x) &= x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - x^2\right)^{-3/2}(-2x) + 1 \cdot \left(\frac{1}{4} - x^2\right)^{-1/2} \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{4} - x^2\right)\left(\frac{1}{4} - x^2\right)^{-3/2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - x^2\right)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Toisen derivaatan arvo kohdassa $x = 0$ on

$$g''(0) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{-3/2} = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2.$$

Derivoidaan vielä funktio $f(x) = x^2$ kahdesti:

$$D^2\, x^2 = D\, 2x = 2.$$

Saatiin siis $f''(0) = g''(0) = 2 = 1/R_0$. Tämä todistaa väitteen.

Tehtävä 4. Todista taulukkokirjan yhtälö $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Todistus. Kannattaa lähteä liikkeelle sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoista

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

ja

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Näitä on käsitelty niin paljon, että ne voidaan pitää tunnettuina. Kannattaa kuitenkin palauttaa mieleen niiden perustelu, jottei tule vahingossa tehtyä kehäpäätelmiä: todistettua yksi kaava toisen avulla ja sitten toinen ensimmäisen avulla.

Merkitään $\alpha = x/2$ ja $\beta = y/2$. Käyttämällä yhteenlaskukaavoja todistettavan yhtälön oikeaan puoleen (ja muistamalla, että $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ ja $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$) saadaan

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\\
&= 2(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta))\\
&= 2(\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta\\
&\qquad + \cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta + \cos\alpha\sin^2\beta\sin\alpha)\\
&= 2\big[(\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{=1})\sin\beta\cos\beta + (\underbrace{\sin^2\beta + \cos^2\beta}_{=1})\sin\alpha\cos\alpha\big]\\
&= 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\beta\cos\beta.
\end{aligned}$$

Toisaalta $x = \alpha + \alpha$ ja $y = \beta + \beta$, joten yhteenlaskukaavoja voidaan käyttää myös todistettavan yhtälön vasempaan puoleen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&\sin x + \sin y = \sin(\alpha+\alpha) + \sin(\beta+\beta)\\
&= \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + \sin\beta\cos\beta + \cos\beta\sin\beta\\
&= 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\beta\cos\beta.
\end{aligned}$$

Yhtälön vasen ja oikea puoli saatiin muokattua samaan muotoon, joten yhtälö on todistettu. □

Tehtävä 5. Todista taulukkokirjan yhtälö $\cos x + \cos y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$.

Todistus. Edetään samalla tavalla kuin edellisesstä tehtävässä. Merkitään $\alpha = x/2$ ja $\beta = y/2$ ja käytetään kosinin yhteenlaskukaavaa ensin yhtälön oikeaan puoleen:

$$\begin{aligned}
&2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\\
&= 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta))\\
&= 2(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\\
&\qquad - \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta)\\
&= 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
&= 2(1-\sin^2\alpha)\cos^2\beta - 2\sin^2\alpha(1-\cos^2\beta)\\
&= 2\cos^2\beta - 2\sin^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\beta\\
&= 2\cos^2\beta - 2\sin^2\alpha.
\end{aligned}$$

Koska $x = \alpha + \alpha$ ja $y = \beta + \beta$, yhteenlaskukaavaa voidaan käyttää myös todistettavan yhtälön vasempaan puoleen:

$$
\begin{aligned}
&\cos x + \cos y = \cos(\alpha + \alpha) + \cos(\beta + \beta)\\
&= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha + \cos\beta\cos\beta - \sin\beta\sin\beta\\
&= 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha.
\end{aligned}
$$

Yhtälön vasen ja oikea puoli saatiin muokattua samaan muotoon, joten yhtälö on todistettu. □

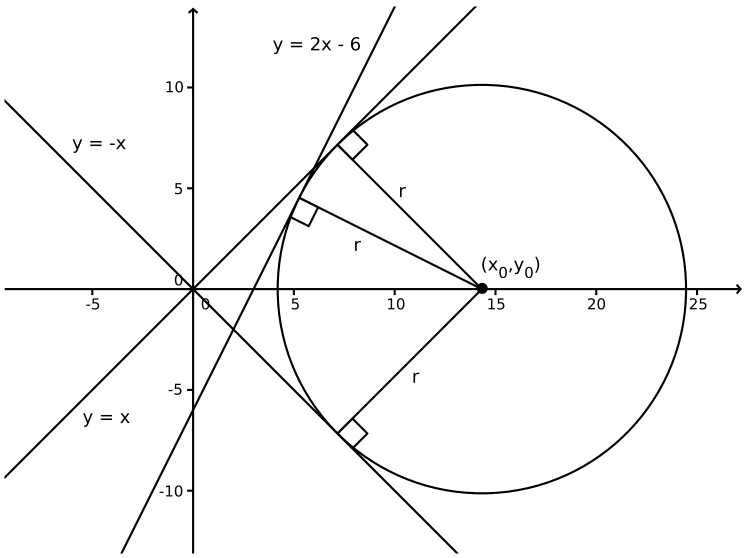
Tehtävä 6. Ympyrä sivuaa suoria $y = x$, $y = -x$ ja $y = 2x - 6$. Määritä sen yhtälö. Kuinka monta tällaista ympyrää on olemassa?

Ratkaisu. Jos ympyrä sivuaa kolmea suoraa, sen keskipisteen etäisyys kaikista kolmesta suorasta on sama eli ympyrän säde. Olkoon ympyrän keskipiste (x_0, y_0) ja säde r. Käyttämällä tuttua kaavaa

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

pisteen etäisyydelle suorasta saadaan kutakin suoraa vastaavat yhtälöt:

$$r = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}, \quad r = \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} \quad \text{ja} \quad r = \frac{|2x_0 - y_0 - 6|}{\sqrt{5}}.$$



Tutkitaan ensin kahta yllä olevista yhtälöistä:

$$
\begin{aligned}
&\frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}}\\
\iff &|x_0 - y_0| = |x_0 + y_0|.
\end{aligned}
$$

Itseisarvojen takia jakaudutaan kahteen tapaukseen:

$$\begin{aligned} x_0 - y_0 &= x_0 + y_0 \\ 2y_0 &= 0 \\ y_0 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned} x_0 - y_0 &= -(x_0 + y_0) \\ 2x_0 &= 0 \\ x_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ympyrän keskipiste sijaitsee siis joko x- tai y-akselilla (näiden pisteet ovat yhtä etäällä suorista $x = y$ ja $x = -y$). Näin ajaudutaan kahteen tapaukseen.

Kahta muuta yhtälöä tutkimalla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} &= \frac{|2x_0 - y_0 - 6|}{\sqrt{5}} \\ \iff \sqrt{5}|x_0 + y_0| &= \sqrt{2}|2x_0 - y_0 - 6|. \end{aligned}$$

Oletetaan ensin, että ollaan x-akselilla, eli $y_0 = 0$. Päädytään jälleen kahteen tapaukseen:

$$\begin{aligned} \sqrt{5}(x_0 + 0) &= \sqrt{2}(2x_0 - 0 - 6) \\ \sqrt{5}x_0 &= 2\sqrt{2}x_0 - 6\sqrt{2} \\ x_0 &= \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sqrt{5}} \approx 14{,}3 \end{aligned} \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned} \sqrt{5}(x_0 + 0) &= -\sqrt{2}(2x_0 - 0 - 6) \\ \sqrt{5}x_0 &= -2\sqrt{2}x_0 + 6\sqrt{2} \\ x_0 &= \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \sqrt{5}} \approx 1{,}7. \end{aligned}$$

Ympyrän keskipiste on siis tässä tapauksessa joko $(\frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}, 0)$ tai $(\frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}, 0)$. Säteen saa esimerkiksi yhtälöstä $r = |x_0 + y_0|/\sqrt{2}$, ja se on eri tapauksissa

$$\frac{6}{2\sqrt{2} + \sqrt{5}} \approx 10{,}1 \quad \text{ja} \quad \frac{6}{2\sqrt{2} - \sqrt{5}} \approx 1{,}2.$$

Oletetaan sitten, että ollaan y-akselilla, eli $x_0 = 0$. Saadaan edelleen kaksi tapausta:

$$\begin{aligned} \sqrt{5}(0 + y_0) &= \sqrt{2}(0 - y_0 - 6) \\ \sqrt{5}y_0 &= -\sqrt{2}y_0 - 6\sqrt{2} \\ y_0 &= -\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \approx -2{,}3 \end{aligned} \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned} \sqrt{5}(0 + y_0) &= -\sqrt{2}(0 - y_0 - 6) \\ \sqrt{5}y_0 &= \sqrt{2}y_0 + 6\sqrt{2} \\ y_0 &= \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \approx 10{,}3. \end{aligned}$$

Ympyrän keskipiste on siis joko $(0, -\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}})$ tai $(0, \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}})$ ja vastaavat säteet ovat

$$\frac{6}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \approx 1{,}6 \quad \text{ja} \quad \frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \approx 7{,}3.$$

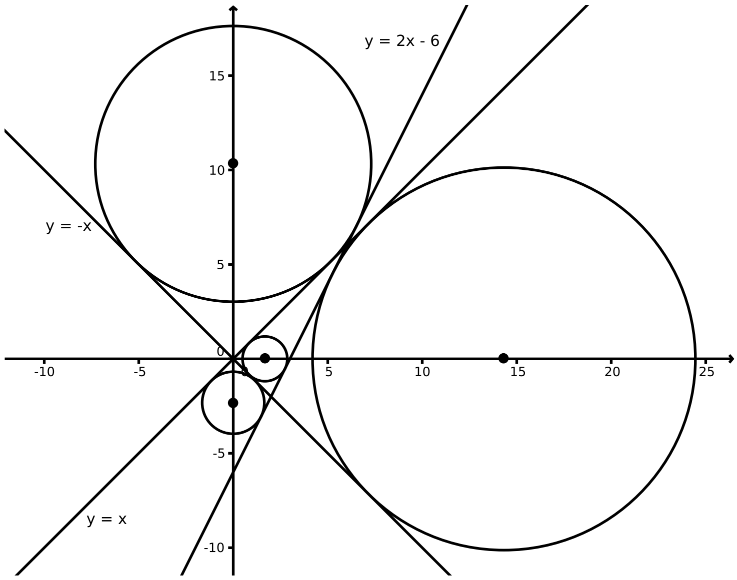
Suoria sivuavia ympyröitä saatiin yhteensä 4 kappaletta, ja niiden yhtälöt ovat

$$\left(x-\frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}\right)^2+y^2=\frac{36}{13+4\sqrt{10}},$$

$$\left(x-\frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right)^2+y^2=\frac{36}{13-4\sqrt{10}},$$

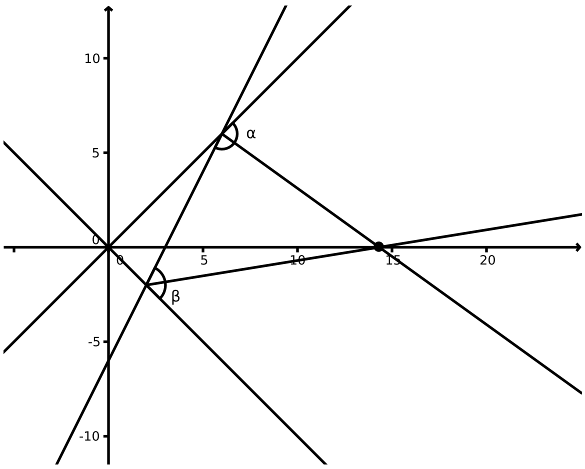
$$x^2+\left(y+\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right)^2=\frac{36}{7+2\sqrt{10}} \quad \text{ja}$$

$$x^2+\left(y-\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{36}{7-2\sqrt{10}}.$$

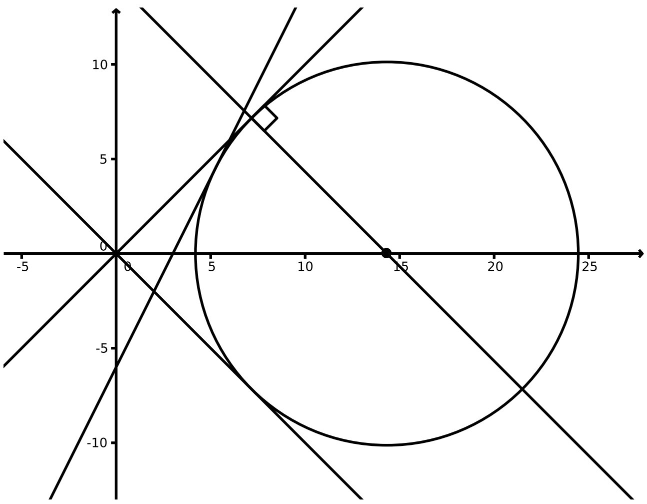


Tehtävä 7. Oletetaan, että edellisen tehtävän suorat on piirretty paperille. Miten harpilla ja viivaimella voidaan piirtää ko. ympyrät?

Ratkaisu. Piirrettäessä käytetään hyväksi tietoa, että pisteet, jotka ovat yhtä kaukana kulman kyljistä, sijaitsevat kulman puolittajalla. Tarkastellaan esimerkiksi alla olevan kuvan kulmia α ja β. Piirretään niiden puolittajat (kulmanpuolittajien piirtäminen on käsitelty Väisälän kirjan 27 §:ssä).



Kulmanpuolittajien leikkauspiste on yhtä kaukana kaikista kolmesta suorasta. Se on siis erään etsityn ympyrän keskipiste. Säde saadaan piirtämällä keskipisteen kautta normaali jollekin suorista (normaalin piirtäminen löytyy Väisälän 26 §:stä).



Samalla tavoin voidaan piirtää kaikki neljä ympyrää.

Tehtävä 8. Pisteet P ja Q jakavat kolmion ABC sivut BC ja AC suhteessa $1 : 2$ niin, että janat CP ja AQ ovat lyhyemmät osat. Janat AP ja BQ leikkaavat pisteessä L. Missä suhteessa suora CL jakaa sivun AB? Vihje: Cevan lause Lehtisen tekstin sivulla 27. (Lehtisen teksti on linkitetty kurssin kotisivulle.)

Ratkaisu. Olkoon R piste, jossa suora CL leikkaa sivun AB. Cevan lauseen mukaan

$$\frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} \cdot \frac{|AR|}{|RB|} = 1.$$

Kun tähän sijoitetaan tunnetut suhteen, saadaan

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{|AR|}{|RB|} = 1.$$

Tästä ratkaistuna saadaan

$$\frac{|AR|}{|RB|} = \frac{1}{4}.$$

Suhde on siis $1 : 4$, missä AR on lyhyempi osa.