Geometria 2013
Harjoitus 10
Ratkaisuehdotuksia (Jokke Häsä)

Tehtävissä 2–8 viitataan Poincarén kiekkomalliin yksikköympyrän $x^2+y^2=1$ tapauksessa ja erityisesti mallin kahden pisteen etäisyyttä.

Tehtävä 1. Janasta poistetaan keskimmäinen kolmannes. Jäljelle jääneistä osajanoista poistetaan jälleen keskimmäinen kolmannes. Poistamista jatketaan loputtomiin poistamalla jokaisella askeleella jäljellä olevista osajanoista keskimmäinen kolmannes. Mikä on poistettujen osien yhteinen pituus verrattuna janan alkuperäiseen pituuteen?

Ratkaisu. Olkoon janan pituus a. Helpointa on tarkastella jäljellä olevien osien yhteispituutta jokaisen vaiheen jälkeen. Merkitään siis jäljellä olevien osien yhteispituutta a_n. Koska vaiheessa n jokaisesta jäljellä olevasta jananpätkästä poistetaan kolmannes, täytyy päteä $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$. Induktiolla voidaan nähdä, että kaikilla n pätee

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n a.$$

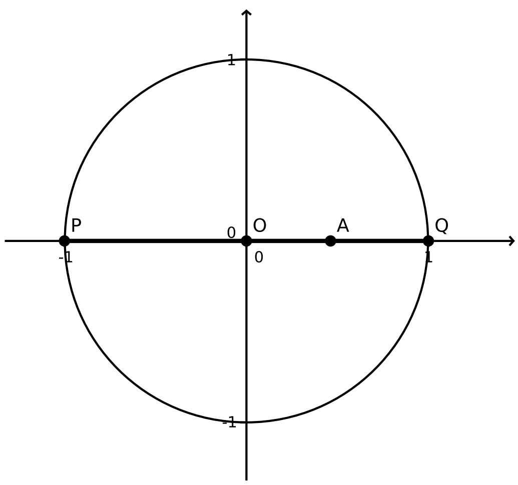
Toisaalta jokaisessa vaiheessa poistettujen osien yhteispituus on $b_n = a - a_n$. Kun n kasvaa rajatta, poistettujen osien yhteispituus lähestyy arvoa

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a-a_n) = \lim_{n\to\infty} a\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = a(1-0) = a.$$

Poistettujen osien pituus siis lähestyy rajatta janan alkuperäistä pituutta.

Tehtävä 2. Etsi mallin piste A, jonka etäisyys $d(O,A)$ origosta O on 1. Millaisen joukon kaikki tällaiset pisteet muodostavat?

Ratkaisu. Helpointa on etsiä pistettä x-akselilta. Oletetaan siis, että $A=(x,0)$ jollain $x>0$. Poincarén suora, joka kulkee origon ja pisteen A kautta, on kiekon vaakasuora halkaisija. Tämä leikkaa kiekon reunan pisteissä $P=(-1,0)$ ja $Q=(0,1)$.



Poincarén etäisyyden laskemiseen tarvittavaksi kaksoissuhteeksi tulee

$$(AO, PQ) = \frac{|AP||OQ|}{|OP||AQ|} = \frac{(x+1)\cdot 1}{1\cdot(1-x)} = \frac{x+1}{1-x}.$$

Nyt Poincarén etäisyys on

$$d(O, A) = \left|\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\right| = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right).$$

(Itseisarvot voi poistaa, koska $x+1 > 1-x$.)

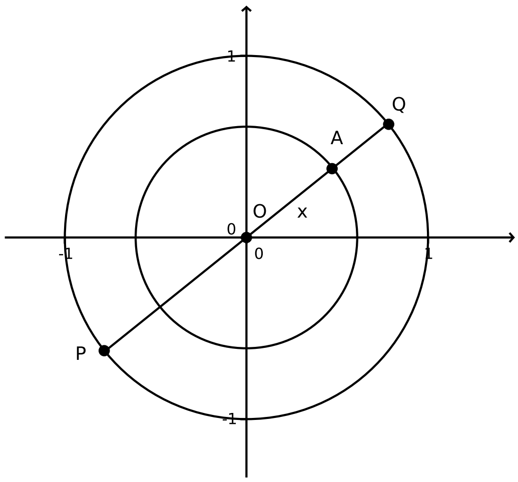
Jotta etäisyys olisi 1, saadaan yhtälö

$$\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 1,$$

josta saadaan lopulta

$$x = \frac{e-1}{e+1} \approx 0{,}462.$$

Yleisessäkin tapauksessa pisteen A etäisyys origosta lasketaan jotain kiekon halkaisijaa pitkin. Kaksoissuhteesta tulee tällöin aivan samanlainen, paitsi että luku x kuvaakin nyt A:n euklidista etäisyyttä origosta. Kaikki tällaiset pisteet muodostavat siis kiekon sisään (euklidisen) ympyrän, jonka säde on $\frac{e-1}{e+1}$.



Tehtävä 3. Laske etäisyydet $d\Big((\frac{3}{100}, 0), (\frac{4}{100}, 0)\Big)$ ja $d\Big((\frac{97}{100}, 0), (\frac{98}{100}, 0)\Big)$.

Ratkaisu. Pisteiden $A = (\frac{3}{100}, 0)$ ja $B = (\frac{4}{100}, 0)$ kauttava kulkeva Poincarén suora on kiekon vaakasuora halkaisija. Kaksoissuhteeksi saadaan tällöin edellisen tehtävän tavoin

$$(BA, PQ) = \frac{|BP||AQ|}{|AP||BQ|} = \frac{\left(1+\frac{4}{100}\right)\left(1-\frac{3}{100}\right)}{\left(1+\frac{3}{100}\right)\left(1-\frac{4}{100}\right)} = \frac{104\cdot 97}{103\cdot 96}.$$

Poincarén etäisyys on siis

$$d(A,B) = \left|\ln\left(\frac{104\cdot 97}{103\cdot 96}\right)\right| \approx 0{,}020.$$

Pisteiden $C = (\frac{97}{100}, 0)$ ja $D = (\frac{98}{100}, 0)$ kohdalla käytetään samaa vaakasuoraa halkaisijaa. Kaksoissuhde on

$$(DC, PQ) = \frac{|DP||CQ|}{|CP||DQ|} = \frac{\left(1+\frac{98}{100}\right)\left(1-\frac{97}{100}\right)}{\left(1+\frac{97}{100}\right)\left(1-\frac{98}{100}\right)} = \frac{198\cdot 3}{197\cdot 2}.$$

Poincarén etäisyys on

$$d(C,D) = \left|\ln\left(\frac{198\cdot 3}{197\cdot 2}\right)\right| \approx 0{,}411.$$

Tehtävä 4. Etsi mallista pisteet A ja B, joille $d(A,B) = e^{1000}$.

Ratkaisu. Edetään samalla tavalla kuin tehtävässä 2. Oletetaan, että etsitty piste A on muotoa $(x,0)$ jollain $x > 0$. Poincarén suora, joka kulkee origon ja pisteen A kautta, on kiekon vaakasuora halkaisija. Tämä leikkaa kiekon reunan pisteissä $P = (-1,0)$ ja $Q = (0,1)$. Kaksoissuhteeksi tulee tällöin sama kuin tehtävässä 2:

$$(AO, PQ) = \frac{x+1}{1-x}.$$

Poincarén etäisyyden täytyy olla e^{1000}, jolloin saadaan yhtälö

$$\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = e^{1000}.$$

Tästä ratkeaa lopulta

$$x = \frac{e^{e^{1000}} - 1}{e^{e^{1000}} + 1}.$$

Ollaan siis todella lähellä kiekon reunaa.

Tehtävä 5. Tarkastellaan pisteitä $A(1/2, 0)$ ja $B(0, -3/4)$. Määritä niiden kuvat inversiossa yksikköympyrän suhteen.

Ratkaisu. Koska piste A on positiivisella x-akselilla, myös sen kuva on positiivisella x-akselilla (koska yksikköympyrän keskipiste on origossa). Kuvapisteen etäisyys origosta saadaan inversiosuhteesta $|OA||OA'| = 1$ (yksikköympyrän säde on 1), ja etäisyys on

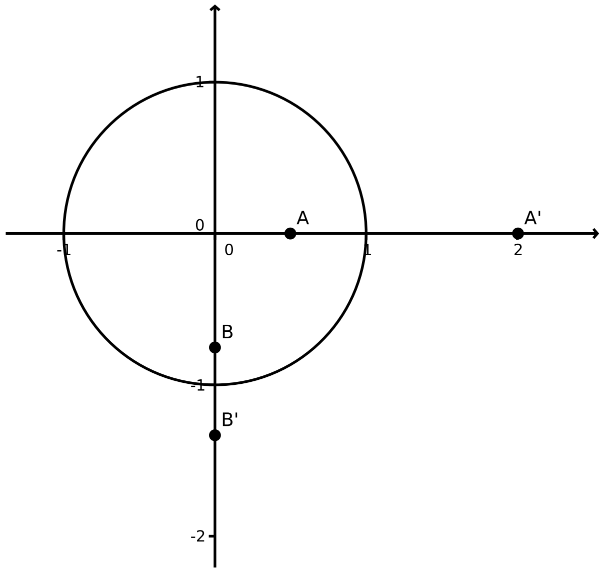
$$|OA'| = \frac{1}{|OA|} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

Kuvapiste A' on siis $(0,2)$.

Pisteen B kohdalla menetellään samalla tavalla. Kuvapiste on negatiivisella y-akselilla, ja sen etäisyys origosta on

$$|OB'| = \frac{1}{|OB|} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}.$$

Kuvapiste B' on siis $(0, -4/3)$.



Tehtävä 6. Tarkastellaan edellisen tehtävän pisteitä. Ympyrä kulkee pisteiden A ja B kautta ja leikkaa yksikköympyrän kohtisuoraan. Määritä ympyrän keskipiste ja säde.

Ratkaisu. Käytetään Greenbergin kirjan propositiota 7.5, joka on ollut esillä jo aiemmissa tehtävissä. Sen mukaan ympyrä δ leikkaa inversioympyrää kohtisuoraan, jos ja vain jos jokainen ympyrän δ piste kuvautuu inversiossa samalle ympyrälle. Toisin sanoen, jos tunnetaan jokin sellaisen ympyrän δ piste, joka on kohtisuorassa inversioympyrää vastaan, myös kuvapiste on ympyrällä δ.

Olkoon δ ympyrä, joka kulkee pisteiden A ja B kautta ja on kohtisuorassa yksikköympyrää vastaan. Tällöin δ kulkee siis myös pisteiden A ja B inversiopisteiden A' ja B' kautta. Nämä pisteet määritettiin edellisessä tehtävässä.

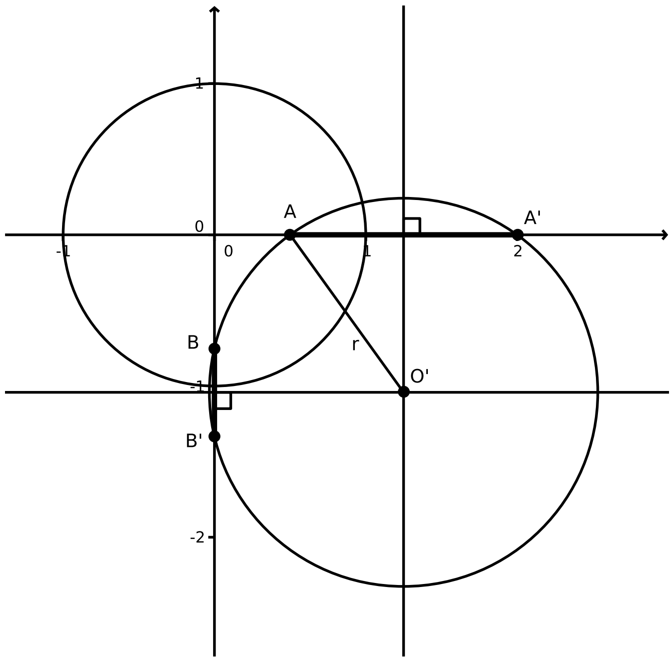
Koska δ kulkee pisteiden A ja A' kautta, sen keskipiste on yhtä kaukana pisteistä A ja A' eli niiden välisen jänteen keskinormaalilla. Jänteen keskipiste on $(5/4, 0)$, ja keskinormaali on pystysuora (ks. seuraava kuva). Näin ollen ympyrän δ keskipisteen x-koordinaatti on $5/4$.

Samalla tavoin saadaan keskipisteen y-koordinaatti. Keskipiste on pisteiden B ja B' välisen jänteen keskinormaalilla. Jänteen keskipiste on $(0, -25/24)$, ja keskinormaali on vaakasuora. Ympyrän δ keskipisteen y-koordinaatti on siis $-25/24$. Näin ollen keskipiste on $(5/4, -25/24)$.

Ympyrän säde saadaan ottamalla keskipisteen etäisyys esimerkiksi pisteestä A. Näin saadaan

$$r^2 = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \left(-\frac{25}{24}\right)\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{625}{36 \cdot 16} = \frac{324 + 625}{576} = \frac{949}{576}.$$

Säde on siis $\sqrt{949}/24 \approx 1{,}284$.



Tehtävä 7. Tarkastellaan edellisen tehtävän pisteitä. Missä pisteissä edellisessä tehtävässä määritetty ympyrä leikkaa yksikköympyrän?

Ratkaisu. Merkitään ympyrän δ keskipistettä $O' = (a, b)$ ja sädettä r. (Näiden arvot laskettiin edellisessä tehtävässä.) Olkoon lisäksi P ympyrän δ ja yksikköympyrän (kumpi tahansa) leikkauspiste (ks. seuraava kuva). Ensinnäkin ympyrän δ yhtälö on

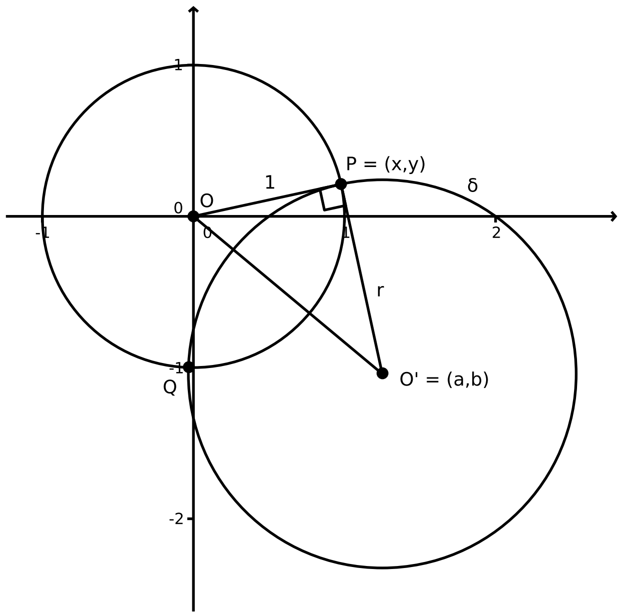
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{eli} \quad x^2 - 2ax + y^2 - 2by = r^2 - (a^2 + b^2).$$

Koska kolmio $OO'P$ on suorakulmainen, nähdään, että

$$(a^2 + b^2) - r^2 = 1^2 = 1, \tag{1}$$

joten ympyrän δ yhtälö tulee muotoon

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by = -1.$$



Leikkauspisteiden määrittämiseksi on ratkaistava yhtälöpari

$$\begin{cases} x^2 - 2ax + y^2 - 2by &= -1 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}.$$

Vähennetään alemmasta yhtälöstä ylempi ja jaetaan kahdella, jolloin saadaan

$$ax + by = 1. \tag{2}$$

Ratkaistaan tästä $y = \dfrac{1 - ax}{b}$ ja sijoitetaan yksikköympyrän yhtälöön:

$$\begin{aligned} & x^2 + \left(\frac{1-ax}{b}\right)^2 = 1 \\ \iff\quad & x^2 + \frac{1 - 2ax + a^2x^2}{b^2} = 1 \\ \iff\quad & b^2x^2 + 1 - 2ax + a^2x^2 = b^2 \\ \iff\quad & (a^2 + b^2)x^2 - 2ax - (b^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Toisen asteen ratkaisukaavan sekä yhtälön (1) avulla saadaan leikkauspisteiden x-koordinaatit:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 4(a^2+b^2)(b^2-1)}}{2(a^2+b^2)} = \frac{a \pm b\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2} = \frac{a \pm br}{r^2+1} \\ &= \frac{5/4 \pm 25/24 \cdot \sqrt{949}/24}{949/576 + 1} = \frac{144}{305} \pm \frac{\sqrt{949}}{61} \approx 0{,}47213 \pm 0{,}50501. \end{aligned}$$

Lopulta y-koordinaatit saadaan yhtälöstä (2):

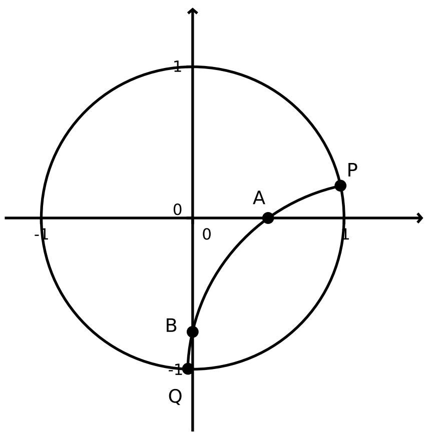
$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{b}(1-ax) = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{a(a \pm br)}{a^2+b^2}\right) = \frac{1}{b} \cdot \frac{a^2+b^2-a^2 \pm abr}{a^2+b^2} = \frac{b \pm ar}{a^2+b^2} = \frac{b \pm ar}{r^2+1} \\
&= \frac{-25/24 \pm 5/4 \cdot \sqrt{949}/24}{949/576+1} = -\frac{24}{61} \pm \frac{6\sqrt{949}}{305} \approx -0{,}39344 \pm 0{,}60602.
\end{aligned}
$$

Merkit on valittava niin, että joko molemmissa koordinaateissa valitaan plus tai molemmissa miinus.

Tehtävä 8. Tarkastellaan tehtävän 5 pisteitä. Määritä niiden etäisyys $d(A, B)$.

Ratkaisu. Pisteiden A ja B kautta kulkeva Poincarén suora on sellaisen (euklidisen) ympyrän kaari, joka kulkee pisteiden A ja B kautta ja on suorassa kulmassa yksikköympyrää vastaan. Tämä ympyränkaari määritettiin tehtävässä 6. Ympyränkaari leikkaa yksikköympyrän pisteissä P ja Q, joiden koordinaatit laskettiin tehtävässä 7. Leikkauspisteet olivat

$$P = (0{,}9771,\ 0{,}2126) \quad \text{ja} \quad Q = (-0{,}0329,\ -0{,}9995).$$



Lasketaan kaksoissuhteeseen tarvittavat (euklidiset) etäisyydet:

$$
\begin{aligned}
|AP| &= \sqrt{(0{,}9771 - 1/2)^2 + 0{,}2126^2} \approx 0{,}5223, \\
|BP| &= \sqrt{0{,}9771^2 + (0{,}2126 + 3/4)^2} \approx 1{,}3716, \\
|AQ| &= \sqrt{(1/2 + 0{,}0329)^2 + 0{,}9995^2} \approx 1{,}1327, \\
|BQ| &= \sqrt{0{,}0329^2 + (0{,}9995 - 3/4)^2} \approx 0{,}2517.
\end{aligned}
$$

Lopulta saadaan Poincarén etäisyydeksi

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{|BP||AQ|}{|AP||BQ|} \right| = \left| \ln \frac{1{,}3716 \cdot 1{,}1327}{0{,}5223 \cdot 0{,}2517} \right| \approx 2{,}47.$$