

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Geometria 2013

Harjoitus 11

1. Pitkän matematiikan kevään 2013 ylioppilaskokeen tehtävä 7.
2. Pitkän matematiikan kevään 2013 ylioppilaskokeen tehtävä 15 käsiteltynä niin, että lähdetään pisteeseen (a, a^2) asetetusta tangentista ja sen normaalista.
3. (Vanha ylioppilaskokeen jokeritehtävä) Paraabelin $y = x^2$ kaarevuutta origossa voidaan tutkia seuraavalla ns. sivuavien ympyröiden menetelmällä. Menetelmä perustuu siihen, että pisteiden $(0,0)$, $(-t, t^2)$ ja (t, t^2) kautta kulkee yksikäsitteinen ympyrän kehä.
 - a) Määritä tämän ympyrän säde $R(t)$.
 - b) Laske "rajaympyrän" säde $R_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} R(t)$. Tätä kutsutaan paraabelin *kaarevuussäteeksi* origossa.
 - c) Johda lauseke funktiolle $g(x)$, jonka kuvaaja on rajaympyrän alapuoli.
 - d) Näytä, että $g''(0) = f'(0) = 1 / R_0$. Tämä on paraabelin *kaarevuus* origossa.
4. Todista taulukkokirjan yhtälö $\sin x + \sin y = 2 \sin((x+y)/2) \cos((x-y)/2)$.
5. Todista taulukkokirjan yhtälö $\cos x + \cos y = 2 \cos((x+y)/2) \cos((x-y)/2)$.
6. Ympyrä sivuaa suoria $y = x$, $y = -x$ ja $y = 2x - 6$. Määritä sen yhtälö. Kuinka monta tällaista ympyrää on olemassa?
7. Oletetaan, että edellisen tehtävän suorat on piirretty paperille. Miten harpilla ja viivaimella voidaan piirtää ko. ympyrät?
8. Pisteet P ja Q jakavat kolmion ABC sivut BC ja AC suhteessa 1 : 2 niin, että janat CP ja AQ ovat lyhyemmät osat. Janat AP ja BQ leikkaavat pisteessä L. Missä suhteessa suora CL jakaa sivun AB? Vihje: Cevan lause Lehtisen tekstin sivulla 27. (Lehtisen teksti on linkitetty kurssin kotisivulle.)
- 8.