FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2013
LASKUHARJOITUS 9

1. a) Olkoon $1 \leq p \leq \infty$ ja määritellään kaikilla $n \in \mathbb{N}$ jatkuva lineaarioperaattori $T_n : \ell^p \to \ell^p$,

$$T_n : x \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

missä $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^p$. Suppeneeko jono $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ pisteittäin tai avaruuden $\mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)$ (operaattori)normin mielessä? Miten käy avaruuden c_0 tapauksessa?
b) Tutki samoin operaattoria

$$S_n : x \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 2^{-1/n}x_{n+1}, 2^{-1/n}x_{n+2}, 2^{-1/n}x_{n+3}, \ldots).$$

c) Olkoon E separoituva Hilbert-avaruus ja $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ sen ortonormaali kanta. Määritellään kaikilla $n \in \mathbb{N}$ operaattori $P_n \in \mathcal{L}(E, E)$, joka on ortoprojektio E:ltä n:n ensimmäisen kantavektorin virittämään aliavaruuteen

$$E_n = \mathrm{sp}(e_k \, : \, k = 1, \ldots, n).$$

Suppeneeko operaattorijono $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ pisteittäin tai avaruuden $\mathcal{L}(E, E)$ normin mielessä?

2. Ovatko avaruudet $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, missä Ω on $\mathbb{R}^n$:n avoin osajoukko, $n = 1, 2$, Banach-algebroja pisteittäisen kertolaskun suhteen? (Ohje: Tarkastele funktioiden lokaalia käyttäytymistä, esim. funktioita $|x|^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, jos $0 \in \Omega$.)

3. Tarkastellaan seuraavassa funktioiden pisteittäistä kertolaskua.
a) Onko Banach–avaruus $C^1(0,1)$, joka koostuu välin $[0,1]$ kerran jatkuvasti derivoituvista funktioista, Banach–algebra (luentomoniste, s. 121), kun se varustetaan normilla

$$\|f\| := \sup_{x \in [0,1]} \{|f(x)|\} + \sup_{x \in [0,1]} \{|f'(x)|\}.$$

b) Onko $C(0,1)$ Banach-algebra, kun se varustetaan tavanomaisen sup-normin kanssa ekvivalentilla, painotetulla normilla

$$\|f\|_w := \sup_{x \in [0,1]} \left\{ \left(\frac{1}{10} + x\right)|f(x)| \right\}.$$

4. Etsi sellainen jatkuva injektio $S : \ell^p \to \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, että kuva–avaruus $\mathrm{Im}(S)$ ei ole suljettu avaruudessa ℓ^p. Vihje. Diagonaalioperaattori $(x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}$, missä (a_k) on sopiva kiinteä rajoitettu skalaarijono.