FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2013
LASKUHARJOITUS 8

1. Olkoon $\Omega =]-2, 2[$. Osoita, että funktio $f(x) = 3|x| + x^2$ kuuluu Sobolev-avaruuteen $H^1(\Omega)$ tutkimalla sen heikkoa derivaattaa.

2. Sobolev-avaruudet $W^{1,p}(\Omega)$ voidaan määritellä kuten avaruus $H^1(\Omega)$, kun $\Omega =]a, b[$ ja $1 < p < \infty$. Heikon derivaatan ja itse avaruuden määritelmässä vain korvataan indeksi 2 indeksillä p. Esitä määritelmän yksityiskohdat. (Huom. Siis $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.)

3. Osoita, että tehtävän 2 Sobolev-avaruudet ovat täydellisiä.

4. Osoita, että funktio $\eta(x) := Ce^{-1/(1-|x|^2)}$, kun $|x| < 1$, ja $\eta(x) = 0$ muulloin, on C^∞, eli mielivaltaisen monta kertaa jatkuvasti derivoituva. Tässä $C > 0$ on sellainen vakio, että $\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x)dx = 1$.
Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1}\eta(\varepsilon^{-1}x)$. Osoita, että kaikilla kerran jatkuvasti derivoituville, rajoitetuille funktioille $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pätee

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \eta_\varepsilon * f(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_\varepsilon(y) f(x-y)dy = f(x)$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Ohje. Ota huomioon funktion η_ε kantaja. Pisteessä x kirjoita $f(x-y) = f(x)+$ ”pientä”.