FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2013
LASKUHARJOITUS 7

1. a) Laske funktioiden $f(x) = x$ ja $g(x) = x(2\pi - x)$ Fourier–kertoimet. (Tässä $x \in [0, 2\pi]$ ja f, $g \in L^2(0, 2\pi)$.) Mitä voit havaita kertoimien suppenemisnopeudesta?
b) Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ trigonometrinen polynomi, missä kertoimet a_k ovat siis reaali- tai kompleksilukuja. Laske (konvoluutio)funktion

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x-t) f(t) dt$$

Fourier–kertoimet $\hat{g}(m)$, $m \in \mathbf{Z}$ lukujen a_k ja f:n Fourier-kertoimien avulla.

2. Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja oletetaan, että sen Fourier–kertoimet toteuttavat $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$. Osoita, että $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{K}$ on jatkuva funktio (ekvivalenssiluokka L^2:ssa sisältää jatkuvan edustajan).

3. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π–periodinen funktio, eli $f(x) = f(2\pi + x)$ kaikilla x. Osoita:

(i) Jos f on k kertaa jatkuvasti derivoituva, niin $|\hat{f}(n)| \leq C(1+|n|)^{-k}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$.

(ii) Jos $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $|\hat{f}(n)| \leq C(1 + |n|)^{-k-2}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$, niin f on k kertaa jatkuvasti derivoituva.

Tässä $k \in \mathbf{N}$ ja $C > 0$ on vakio. Vihje. Osittaisintegrointi Fourier-kertoimien kaavassa.

4. a) Fourier-sarjat voidaan tietysti määritellä mielivaltaisella lukuvälillä $[a, b]$, $a < b$ lisäämällä kaavoihin sopivia kertoimia. Esitä Fourier-kertoimien ja Fourier-sarjan kaava avaruudessa $L^2(a, b)$, erityisesti tapauksessa $[a, b] = [0, 1]$. (Pohdittavaksi, ei tarvitse esittää ratkaisua: sopiva lineaarioperaattori, yksinkertainen muuttujanvaihto, siirtää Fourier-sarjojen teorian avaruudesta $L^2(0, 2\pi)$ avaruuteen $L^2(a, b)$ suoraviivaisella tavalla.)
b) Esitä ilman todistuksia Fourier-kertoimien ja -sarjan kaavat *kolmen muuttujan funktioille* eli avaruudessa $L^2(Q)$, kun $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ ja reaaliluvuille a_j, b_j pätee $a_j < b_j$, $j = 1, 2, 3$.