FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2013
LASKUHARJOITUS 6

1. Olkoon E Hilbert–avaruus $L^2([0,2\pi])$ ja $g(t) := t$, $t \in [0,2\pi]$. Tiedetään, että funktiot

$$e_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \quad , \quad n \in \mathbb{Z},$$

muodostavat kyseisessä avaruudessa ortonormaalin kannan. Määrää funktion g Fourier–kertoimet $c_n \in \mathbb{C}$ kannan suhteen (eli esitä g suppenevana summana $g = \sum_n c_n e_n$) ja laske kertoimien avulla $\|g\|_2$.

2. Osoita, että Legendren polynomit

$$p_n(t) := \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}\Big((t^2-1)^n\Big)$$

muodostavat ortonormaalin jonon avaruudessa $L^2([-1,1])$.

3. Tarkastellaan Hilbert–avaruutta $E := L^2(\mathbf{R})$. Etsi jokin $\psi \in E$, jolle supp $(\psi) = [0,2]$ sekä toisaalta kaikki funktiot ψ_k, $k \in \mathbf{Z}$, missä $\psi_k(t) := \psi(t-k)$, $t \in \mathbf{R}$, ovat keskenään ortogonaaliset.
(Määritelmä: funktion ψ *kantaja* on supp $(\psi) := \overline{\{x \in \mathbf{R} \mid \psi(x) \neq 0\}}$.)

4. Banach avaruuden X rajoitettu lineaarinen operaattori $P : X \to X$ on projektio, jos $P^2 (:= P \circ P) = P$. Tarkemmin, tällainen operaattori on projektio aliavaruudelle Y, kun $Y := P(X)$. Tällöin pätee $X = Y \oplus Z$, missä $Z := \ker(P) := \{x \in X \mid Px = 0\}$. (Sanotaan, että Z on Y:n *komplementti*.)
Etsi jokin projektio Banach–avaruudelta $C(-2,2)$
a) yksiulotteiselle aliavaruudelle Y, jonka virittää vakiofunktio 1,
b) yksiulotteiselle aliavaruudelle Y, jonka virittää funktio e^{t^2},
c) aliavaruudelle

$$Y := \{f \in C(-2,2) \mid f(t) = -f(-t) \ \forall t \in [-2,0]\},$$

d) aliavaruudelle

$$Y := \{f \in C(-2,2) \mid f(1) = 0\},$$

e) aliavaruudelle

$$Y := \{f \in C(-2,2) \mid f(1) = f(-1) = 0\}.$$

Huomaa, että sinun tulee todeta, että operaattorisi ovat lineaarisia ja rajoitettuja. Pystytkö esittämään a)– ja b)–kohtiin useita eri vastauksia ? Huomaa, kuinka komplementti Z riippuu siitä, minkä projektion valitsit!