

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2013
LASKUHARJOITUS 5

1. Todista suunnikasyhtälön avulla, että avaruudet $L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, eivät ole Hilbert-avaruuksia.

2. Olkoon $(x_n)_{n=1}^\infty$ Hilbert-avaruuden H jono. Sanomme, että (x_n) suppenee avaruudessa H heikosti vektoriin $x \in H$, jos kaikilla $y \in H$ pätee

$$(x_n|y) \rightarrow (x|y), \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Tässä siis suppeneminen tapahtuu kerroinkunnassa \mathbb{K} .

(i) Jos jono suppenee tavanomaisessa mielessä, osoita, että se suppenee myös heikosti.

(ii) Oletetaan, että $(x_n)_{n=1}^\infty$ on jono, joka suppenee vektoriin $x \in H$ heikosti, ja lisäksi pätee $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, kun $n \rightarrow \infty$. Osoita, että tällöin $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, eli jono suppenee x :ään tavanomaisessa mielessä.

(iii) Olkoon $H := \ell^2$ sekä $e_n \in \ell^2$ tavanomainen n :s kanoninen kantavektori. Osoita, että jono $(e_n)_{n=1}^\infty$ suppenee vektoriin $0 \in \ell^2$ heikosti.

3. Tarkastellaan Hilbert-avaruutta $L^2(-5, 5)$, normina $\|f\|_2 := (\int_{-5}^5 |f(t)|^2 dt)^{1/2}$. Olkoon M aliavaruus

$$M := \{f \in L^2(-5, 5) \mid f(t) = 0 \text{ kun } t \in [0, 5]\}.$$

Etsi ortogonaalinen projektio $L^2(-5, 5)$:lta M :lle.

Olkoon N 2-ulotteinen aliavaruus, jonka virittävät vakiofunktio 1 ja monomi $f(t) = t$. Etsi ortogonaalinen projektio N :lle.

4. Jos A on normiavaruuden E osajoukko, sanomme, että $x \in A$ on normin minimoiva alkio, mikäli

$$\|x\| = \inf\{\|y\| \mid y \in A\}.$$

Seuraavassa E on suljetun välin jatkuvien funktioiden avaruus varustettuna tavanomaisella sup-normilla.

a) Osoita, että $A := \{f \in C(-5, 5) \mid f(0) = 1\}$ on avaruuden $C(-5, 5)$ suljettu ja konvekksi osajoukko, jossa on äärettömän monta normin minimoivaa alkioita.

b) Osoita, että

$$A := \left\{ f \in C(0, 1) \mid f(0) = 0 \text{ ja } \int_0^1 f(t) dt = 1 \right\}$$

on avaruuden $C(0, 1)$ suljettu ja konvekksi osajoukko, jossa ei ole lainkaan normin minimoivaa alkioita. Ohje. Tarkastele ensin vaikkapa sellaisia funktioita $f \in A$, joille $f(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0, 1]$. Havaitse, että näiden f normien infimum on 1, jne.