FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2013
LASKUHARJOITUS 4

1. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$\text{a)}\quad \int_0^1 \frac{1}{4+|t-s|^2} f(s)ds + \cos t + f(t) = 0,$$

$$\text{b)}\quad \int_0^t \frac{1}{4+|t-s|} f(s)^2 ds = \cos t + 2e^{t^2} f(t)$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, joka on jatkuva reaaliarvoinen funktio välillä $[0,1]$. (Ajattele kiintopisteongelmana avaruudessa $C(0,1)$. Kohdassa b), yhtälön vasemman puolen määrittelemä operaattori T *ei* ole kontraktio avaruudessa $C(0,1)$, vaan tarkastelujoukoksi $D \subset C(0,1)$ on syytä valita jokin pallo $\bar{B}(\bar{0}, R)$ sopivalla $R > 0$. Valinta on suoritettava niin, että $T(D) \subset D$ ja T on aito kontraktio joukossa D. Voit pitää tunnettuna, että yhtälöissä esiintyvät integraalilausekkeet ovat jatkuvia t:n funkioita.)

2. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$f(t) = e^{-t^2} + \int_{-5}^{5} e^{-100|t|-100|s|} f(s)^2 ds \tag{0.1}$$

on ratkaisu avaruudessa $C(-5,5)$. Opastus. Katso tehtävä 1 b). Muuttujanvaihto integraalissa.

3. Banachin kiintopistelauseesta on olemassa monia johdannaisia. Todista: Olkoon D Banach–avaruuden suljettu osajoukko ja $F : D \to D$. Oletetaan, että F^n on aito kontraktio jollakin $n \in \mathbf{N}$. Silloin F:llä on yksikäsitteinen kiintopiste joukossa D.

4. Olkoot $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$ ja olkoon $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbf{R}$ on jatkuva. Tarkastellaan operaattoria

$$Ff(t) := \int_a^t K(t,s) f(s) ds$$

missä $f \in C(a,b)$ ja $t \in [a,b]$. Osoita, että F^n on aito kontraktio $C(a,b)$:ssä jollekin n (vaikka $|K(t,s)|$ ei olisikaan pieni! Mieti, mitä tapahtuu, kun lasket n kertaa peräkkäin integraalin $\int_0^t$ esim. vakiofunktiosta.)
Tarkastele tämän valossa Volterran integaaliyhtälön

$$f(t) = \int_0^t e^{t^2+s^2} f(s) ds + 100 e^t$$

ratkaisemista, kun f on määritelty välillä $[0, 100] \subset \mathbf{R}$.