FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2013
LASKUHARJOITUS 3

1. Onko normi $\|f\|_w := \sup_{t\in[0,1]} w(t)|f(t)|$ ekvivalentti avaruuden $C(0,1)$ tavanomaisen sup-normin kanssa, kun a) $w(t) = 1 + \sin t$, b) $w(t) = t$, c) $w(t) = t^2$.
Ovatko tapaukset b) ja c) keskenään ekvivalentteja normeja avaruudessa $C(0,1)$? (Voi olla hyödyllistä tutkia funktioita $(1-t)^m \in C(0,1)$ tai jatkuvia funktioita, joiden maksimi on 1, mutta jotka häviävät välin $[0,1/m]$ ulkopuolella; $m \in \mathbb{N}$.)

2. a) Olkoon $1 \le p < q \le \infty$. Näytä, että $\|x\|_q \le \|x\|_p$, kun $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p$. Päättele tästä, että $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$. (Vihje. Tutki aluksi sellaista alkiota $x \in \ell^p$, jolle $\|x\|_p = 1$, jolloin x:n kaikki koordinaatit ovat myös enintään 1.)
b) Osoita, että avaruuden $\mathbf{R}^n$ normit

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j| \quad \text{ja} \quad \|x\|_\infty := \sup_{j=1,\dots,n} |x_j|$$

ovat ekvivalentit, kun $x = (x_1, \dots, x_n)$. Osoita sitten, että itse asiassa kaikki normit $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$, $1 < p < \infty$, ovat ekvivalentteja esim. normin $\|\cdot\|_1$ kanssa.

3. Osoita, että avaruus c_0 (nollaan suppenevien lukujonojen avaruus) varustettuna sup-normilla on täydellinen. Voit esim. menetellä seuraavasti. Avaruus ℓ^∞ on täydellinen, koska se on erikoistapaus rajoitettujen kuvausten avaruudesta $B(A,\mathbb{K})$, joka on luennoilla osoitettu täydelliseksi. Luentojen Lauseen 3.12 mukaan Banach-avaruuden suljettu aliavaruus on täydellinen. Riittää siis osoittaa, että c_0 on suljettu osajoukko avaruudessa ℓ^∞: jos $y \in \ell^\infty$ on jonon $\left(y^{(n)}\right)_{n=1}^\infty \subset c_0$ raja-arvo sup-normin suhteen, niin y on nollaan suppeneva lukujono.

4. Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus ja $x_k \in E$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Sanomme, että sarja

$$\sum_{k=1}^\infty x_k \tag{0.1}$$

suppenee avaruudessa E, jos osasummien jono $(y_n)_{n=1}^\infty$, missä

$$y_n = x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k,$$

suppenee avaruudessa E. Tällöin *sarjan summa* on $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, ja kirjoitetaan $y = \sum_{k=1}^\infty x_k$. Tutki, suppeneeko sarja (0.1) seuraavissa tapauksissa, ja jos suppenee, laske sarjan summa. (Geometrisen sarjan summakaava voi olla hyödyllinen. Voit olettaa tunnetuksi, että ℓ^∞ ja $C(-1,1)$ ovat täydellisiä.)
a) $E = \ell^\infty$ ja $x_k \in E$ on lukujono, jonka k:s koordinaatti on $(-1)^k$ ja muut koordinaatit 0.
b) $E = \ell^\infty$, $x_k = 2^{-k}(1, \dots 1, 0, 0, 0 \dots)$, missä k ensimmäistä koordinaattia ovat 1, loput nollia.
c) $E = C(-1,1)$, x_k on funktio $2^{-k}(1-t)^k$, $t \in [-1,1]$.