FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2013
LASKUHARJOITUS 2

- Tällä kurssilla log tarkoittaa luonnollista logaritmia, siis kantalukuna e.
- Kun a ja b ovat reaalilukuja, joille $a < b$, merkitään tuttuun tapaan

$$C(a,b) := \{f : [a,b] \to \mathbf{R} \text{ jatkuva } : \|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\}.$$

1. Tutki, ovatko seuraavat lineeariset kuvaukset hyvin määriteltyjä, rajoitettuja operaattoreita annetusta normiavaruudesta E normiavaruuteen F.

a) $S_w : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (a_k x_{k+1})_{k=1}^\infty$, missä $a_k := k^{-1}$ sekä $E = \ell^2$, $F = \ell^1$,

b) $M_a : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (a_k x_k)_{k=1}^\infty$, missä $a_k := (1+k)^{-2}$ sekä $E = \ell^5$ ja $F = \ell^2$,

c) $M_b : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (b_k x_k)_{k=1}^\infty$, missä $b_k := \log k$ sekä $E = \ell^1 = F$.

(Hölder!)

2. Samoin lineaarikuvauksille

$$a) \quad Rf(t) := \int_{-5}^{5} t^2 \frac{f(s)}{\sqrt{5-s}} ds, \qquad b) \quad Rf(t) := \int_{-5}^{5} t^2 \frac{f(s)}{5-s} ds,$$

missä $f \in E := F := C(-5,5)$ ja $t \in [-5,5]$. (Integraalien suppeneminen vaikuttaa asiaan.)

3. Tarkastellaan kompositio–operaattoreita $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$, missä φ on jokin jatkuva reaaliarvoinen reaalimuuttujan funktio. (Kompositio-operaattoreita on tarkoitus esitellä maanantain 4.2. luennolla.) Kun

$$\varphi(t) := \frac{1}{10} t^2,$$

osoita, että $C_\varphi : C(-5,5) \to C(-5,5)$ on hyvin määritelty ja jatkuva operaattori ko. avaruuksien välillä (lineaarisuuden voi olettaa tunnetuksi).
Miksi C_φ ei ole surjektio tässä tapauksessa?

Olkoon vielä

$$\psi(t) := \frac{1}{2} t.$$

Osoita, että $C_\psi : C(0,1) \to C(0,1)$ ei ole injektio. (Tarkastele kahta jatkuvaa funktiota, joilla on samat arvot välillä $[0,1/2]$, mutta ei välillä $[1/2,1]$.)

4. Etsi avaruuden c_0 rajoitettu jono, jolla ei ole suppenevia osajonoja. Avaruus c_0 koostuu lukuun 0 suppevista (esim.) reaalilukujonoista, normina sup–normi. Vihje. Poimi sopivia vektoreita, joiden normi on 1.