FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2013
LASKUHARJOITUS 1

1. Suppeneeko jono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruudessa $C(0,1)$ (suljetun välin $[0,1]$ jatkuvien funktioiden avaruus varustettuna tavanomaisella sup–normillaan), kun $f_n := f_n(t)$, $t \in [0,1]$ on

a) $\frac{1}{n}\cos(nt)$, b) $(1-t)^n$.

Osoita, että jono

c) $n(e^{t/n}-1)$

suppenee funktioon t avaruudessa $\big(C(0,1), \|\cdot\|_\infty\big)$. (Seuraavista työkaluista voi olla apua. Eksponenttifunktion Taylor-sarja. Erotusfunktion maksimipisteen etsiminen tavanomaisella ääriarvotarkastelulla.)

2. Avaruudessa $C(0,1)$ myös lauseke

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt \tag{1}$$

määrittelee normin. Suppenevatko jonot a)–c), kun $C(0,1)$ varustetaan tällä normilla?

3. a) Onko avaruuden $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$ osajoukko

$$X := \{f \in C(0,1) \mid f(t) = 0 \ \forall t \in [0,1/2]\}$$

tiheä, eli voidaanko jokaista $C(0,1)$:n alkiota approksimoida X:n alkioilla mielivaltaisella tarkkuudella? (Vastaus: eipä tietenkään; etsi joku $C(0,1)$:n alkio f, jolle $\|f-g\|_\infty \geq 1$ kaikilla $g \in X$.)
b) Sama tehtävä, kun X korvataan joukolla

$$Y := \{g \in C(0,1) \mid g(0) = g(1)\}.$$

(Harrastustehtävä, pohdittavaksi jos asia kiinnostaa: onko Y tiheä avaruudessa $C(0,1)$, jos sup-normi korvataan tehtävän 2 normilla?)

4. Osoita, että rajoitettujen jonojen avaruus ℓ^∞, varustettuna sup-normilla, ei ole separoituva. Ohje. Voit käyttää tietoa, että $\mathbf{N}$:n kaikkien osajoukkojen A muodostama joukkoperhe $P(\mathbf{N})$ on ylinumeroituva. Tarkastele ℓ^∞:n alkioita muotoa

$$x = \big(x_k\big)_{k=1}^{\infty}\ , \text{ missä } x_k = 1, \text{ kun } k \in A, \text{ ja } x_k = 0, \text{ kun } k \notin A.$$