FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2013
LASKUHARJOITUS 12

1. a) Olkoon $1 < p < \infty$ ja $1/p + 1/q = 1$. Kuvaus $\lambda : x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto x_1 - x_2 + 10x_8$ on jatkuva ja lineaarinen $\ell^p \to \mathbf{K}$, siis ℓ^p:n duaalin alkio. Mikä ℓ^q:n alkio $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ vastaa λ:aa samaistuksessa $(\ell^p)^* = \ell^q$ (eli pätee $\langle x, y\rangle = \lambda x$ kaikilla x)? Laske λ:n duaalinormi.
b) Tiedämme, että Banach–avaruuden $L^p(-1,1)$ duaali on $L^q(-1,1)$, kun $1 < p < \infty$ ja $1/p + 1/q = 1$. Tällöin funktio $g \in L^q(-1,1)$ määrittelee $L^p(-1,1)$:n duaalin alkion kaavalla

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx. \tag{0.1}$$

Mikä L^q:n alkio vastaa λ:aa, kun $\lambda : L^p(-1,1) \to \mathbf{R}$,

$$\lambda(f) := \int_{-1}^{1} e^{x^2} f(1 - |x|)dx$$

2. Seuraavassa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. a) Totea, että Hilbert-avaruuden sisätulo määrittelee aina koersiivisen bilineaarimuodon. b) Onko bilineaarinen muoto

$$B : (f, g) \mapsto \int_{0}^{10} f(x)g(10 - x)dx$$

koersiivinen avaruudessa $L^2(0, 10)$? Entä

$$R : (f, g) \mapsto \int_{0}^{10} f(x)g(x)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{10} f(x)g(10 - x)dx$$

3. Totea, että jokainen $g \in L^1(0,1)$ määrittelee avaruuden $C(0,1)$ duaalin alkion kaavalla

$$f \mapsto \int_{0}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Oletetaan, että kerroinkunta on $\mathbf{R}$, että g on jatkuva ja $g(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$. Osoita tässä erikoistapauksessa, että g:n duaalinormi on sama kuin $\|g\|_{L^1}$.

4. Osoita, että on olemassa jatkuva lineaarikuvaus $T : L^{\infty}(0,1) \to \mathbb{R}$, jolle $T\varphi = \varphi(\frac{1}{2})$ kaikilla jatkuvilla $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$. (Hahn-Banach.)