FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2013
LASKUHARJOITUS 11

1. Olkoot E, F ja G Banach-avaruuksia, normeina $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_F$ ja $\|\cdot\|_G$. Tuloavaruus $E\times F\times G$ on vektoriavaruus, jonka alkiot ovat kolmikoita (eli kolmen alkion pituisia jonoja) $x=(x_1,x_2,x_3)$, missa $x_1\in E$, $x_2\in F$, $x_3\in G$.
a) Osoita, että lausekkeet

$$\|x\|^{(1)} = \|x_1\|_E + \|x_2\|_F + \|x_3\|_G$$

sekä

$$\|x\|^{(\infty)} = \max\left\{\|x_1\|_E, \|x_2\|_F, \|x_3\|_G\right\}$$

ovat normeja tuloavaruudessa $E\times F\times G$.
b) Olkoon $1<p<\infty$. Osoita, että lauseke $\|x\|^{(p)} = \Big(\|x_1\|_E^p + \|x_2\|_F^p + \|x_3\|_G^p\Big)^{1/p}$ on normi avaruudessa $E\times F\times G$. Osoita vielä, että kaikki tässä tehtävässä esiintyvät normit ovat keskenään ekvivalentteja.
Mietittäväksi, ei tarvitse esittää ratkaisua laskuharjoituksissa: kuinka tehtävän 1 tulokset yleistyvät N:n Banach-avaruuden karteesiselle tulolle, kun $N\geq 2$ on mielivaltainen luonnollinen luku.

2. a) Tehtävän 1 tilanteessa, osoita että tuloavaruus $E\times F\times G$ on täydellinen.
b) Jos X ja Y ovat separoituvia Hilbert-avaruuksia, ja niillä on ortonormaalit kannat $(e_n)_{n=1}^\infty \subset X$ ja $(f_n)_{n=1}^\infty \subset Y$, määrittele tuloavaruudessa $X\times Y$ sisätulo, joka tekee siitä Hilbert-avaruuden. Etsi siellä jokin ortonormaali kanta edellä mainittujen kantojen avulla.

3. Olkoon X Banach-avaruus ja A, B jatkuvia lineaarioperaattoreita $X\to X$. Sanotaan, että A ja B kommutoivat, jos $AB=BA$. Kommutoivatko ne seuraavissa tapauksissa:
a) $A=T^n$, $B=T^m$, missä m, $n\in\mathbf{N}$, sekä X ja jatkuva lineaarioperaattori $T:X\to X$ mielivaltaisia;
b) $X=\ell^2$,

$$A:(x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (k^{-1}x_{k+1})_{k=1}^\infty \quad , \quad B:(x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (e^{-k}x_{k+1})_{k=1}^\infty .$$

c) $X=C(0,1)$ ja $A=C_\varphi$ ja $B=C_\psi$ ovat kompositio-operaattoreita (harjoitus 2, tehtävä 3), ja $\varphi(t)=t^2$, $\psi(t)=1-t$.
d) kuten edellinen kohta, mutta $\varphi(t)=t^3$, $\psi(t)=\sqrt{t}$.

4. Olkoon $1\leq p\leq\infty$. Esitä jokin isomorfismi T avaruudelta $L^p(]0,1[)$ avaruuteen E, kun a) $E:=L^p(]-5,5[)$ b) $E:=L^p(]0,\infty[$. Ensimmäisessä tapauksessa, esitä kaksi erilaista esimerkkiä T:stä. Jälkimmäisessä tapauksessa T voisi olla esim. muotoa $Tf(x)=g(x)f(h(x))$, missä $f\in L^p(]0,1[)$, $x\in]0,\infty[$ on muuttuja, sekä g ja h ovat sopivasti valittuja funktioita $]0,\infty[\to\mathbb{R}$. Tarvitset määrätyn integraalin muuttujanvaihtokaavaa.