FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2013
LASKUHARJOITUS 10

1. Tarkastellaan jatkuvien lineaaristen operaattorien $T_n : X \to Y$ muodostamia perheitä, missä $n \in \mathbf{N}$ sekä X ja Y Banach–avaruuksia. Banach–Steinhausin lauseen mukaan joko

1° on olemassa $M \in [0, \infty[$ jolle
$$\|T_n\| \leq M$$
kaikilla n, tai

2° voidaan löytää lähtöavaruuden X vektori x, jolle
$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|T_n x\|_Y = \infty.$$
Tutki seuraavissa tapauksissa, kumpi vaihtoehto pätee. Mikäli 2° pätee, etsi lisäksi joku vektori $x \in X$, jolla on väitetty ominaisuus.

a) $X := \ell^2$, $Y := \ell^1$, $T_n : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (x_k \chi_n(k))_{k=1}^\infty$, missä $\chi_n(k) = 1$, jos $k \leq n$ ja $\chi_n(k) = 0$, jos $k > n$.

b) $X = Y = C(0,1)$, ja T_n on kompositio–operaattori $T_n f = f \circ \varphi_n$, $\varphi_n(t) := t^n$, kun $t \in [0,1]$.

2. Samoin, kun

a) $X = Y = L^2(\mathbf{R})$, $T_n f(x) := f(x/n)$ melkein kaikilla x.

b) $X = Y = \ell^2_w$, joka on painotettu ℓ^2–avaruus
$$\ell^2_w := \left\{ x = (x_k)_{k=1}^\infty \;\middle|\; \|x\|_w := \Big(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 e^k \Big)^{1/2} < \infty \right\}$$
ja
$$T_n : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (x_{k-n})_{k=1}^\infty,$$
missä $x_m := 0$, kun $m \leq 0$.

3. Etsi esimerkki Banach–avaruuden E suljetuista ja rajoitetuista osajoukoista A ja B, joille $A + B := \{x + y \mid x \in A \;,\; y \in B\}$ ei ole suljettu.

4. Olkoot E, F ja G Banach–avaruuksia. Kuvaus $A : E \times F \to G$ on *bilineaarinen*, jos kuvaukset $A_{1,z} : E \to G$, $A_{1,z}(x) := A(x,z)$ sekä $A_{2,w} : F \to G$, $A_{2,w}(y) := A(w,y)$ molemmat ovat lineaarisia, kaikilla $w \in E$ ja $z \in F$. Osoita Banach–Steinhausin lauseen avulla, että bilineaarikuvaus A on rajoitettu (eli
$$\|A\| := \sup\{\|A(x,y)\|_G \mid \|x\|_E \leq 1, \|y\|_F \leq 1\} < \infty \quad)$$
jos ja vain jos lineaarikuvaukset $A_{1,z} : E \to G$ ja $A_{2,w} : F \to G$ ovat rajoitettuja kaikilla $w \in E$ ja $z \in F$.