

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI

Helsingin Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luennot, kevät 2006, 2008 ja 2010

Kari Astala ja Petteri Piironen (v. 2006)

Hans-Olav Tylli (v. 2008 ja 2010)

Huom.: tämä on vuoden 2010 virallinen versio

Sopivaa oheis- ja lisälukemistoa tarjoavat esimerkiksi seuraavat oppikirjat:

- * B. Bollobás, *Linear Analysis*. Cambridge Univ. Press, 1999.
(ytimekäs yleiskirja)
- * D. Werner, *Funktionalanalysis*. Springer. (hyvä yleiskirja, saksankielinen)
- * W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (3. painos). McGraw-Hill, 1987.
(luvut 3-5, ei kata koko kurssia; lisäksi reaali- ja kompleksianalyysia)
- * A. Friedman, *Foundations of Modern Analysis*. Dover, 1982.
(edullinen ja tiivis yleiskirja, myös mittateoriaa ja reaalianalyysia)
- * W. Rudin, *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.
(erilainen sisältö ja rakenne, laaja yleiskirja)
- * J. Conway, *A Course in Functional Analysis*. Springer, 1990. (yleiskirja)
- * I. J. Maddox, *Elements of Functional analysis*. Cambridge Univ. Press, 1977 (perusteellinen, mutta vanhempi yleiskirja)

SISÄLTÖ

0. Johdanto	1
1. Metriikka ja metrinen avaruus	4
2. Normi ja normiavaruus	8
ℓ^p -avaruudet	16
Lineaariset operaattorit	23
3. Täydellisyys ja Banachin avaruus	31
Vektori-arvoisista sarjoista	38
L^p -avaruudet	43
Banachin kiintopistelause (epälineaarinen FA)	52
4. Hilbertin avaruudet	61
Ortogonaaliset projektiot	72
Ortonormaalit kannat	75
5. Fourier-sarjat	89
Yhteenvedo (Fourier-sarjojen L^2 -teoriasta)	98
Sobolev-avaruudet	100
Sovelluksista differentiaaliyhtälöihin	108
6. Lineaariset operaattorit	116
Neumannin sarja	127
7. Tasaisen rajoituksen periaate	132
Banach–Steinhausin lauseen sovelluksia Fourier-sarjoihin	137
8. Avoimen kuvauksen lause	144
Sovellus Fourier-analyysiin	150
9. Dualiteetti ja Hahn-Banachin lauseet	158
Hilbertin avaruuden duaali	162
Hahn–Banachin lauseet	163
Bilineaarimuodot ja Lax–Milgramin lause	173
Biduaali	177
Transpoosi	180
10. Transpoosi ja adjungaatti	146
Adjungaatti	147
2. Kompaktisuudesta	12
Riesz-Fredholmian teoria	19

0. JOHDANTO

Funktionaalianalyysissa tutkitaan muun muassa

- ääretönulotteisten vektoriavaruuksien, ja erityisesti täydellisten normia-
varuuskien eli Banach avaruuksien ominaisuuksia (joskus myös yleisem-
pien topologisten vektoriavaruuksien ominaisuuksia).
- näiden välisten jatkuvien lineaaristen (tai epälineaaristen) kuvausten
ominaisuuksia.
- edellisten kohtien monia eri sovelluksia.

Yritämme seuraavan valmisteleavan esimerkin kautta selvittää, miksi tällaisia kysymyksiä tutkitaan ja millaisia sovelluksia funktionaalianalyysillä tyypillisesti on (tarkempiin yksityiskohtiin palataan kurssin aikana).

0.1. **Esimerkki.** Tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$(0.2) \quad f(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s)f(s)ds = g(x), \quad x \in [0, 1],$$

missä $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ovat annettuja jatkuvia kuvauksia, sekä $\lambda \in \mathbb{R}$ on parametri. Tehtävänä on löytää funktio f , jolle yhtälö (0.2) pätee.

Käy ilmi että

i) jos parametri $|\lambda|$ on pieni, yhtälön ratkaisufunktio f on olemassa ja yksikäsitteinen; toisaalta

ii) kaikilla parametrin arvoilla $|\lambda|$ näin ei välttämättä ole; herää siis kysymys, mitä voidaan sanoa näistä poikkeuksellisista parametreista.

Tällaisiin kysymyksiin päädytään esimerkiksi monissa fysiikan ongelmissä, vaikkapa viulun kielen ominaisvärähtelyjä määrättäessä. Itse asiassa, yksi matemaattisen fysiikan keskeisistä kysymyksistä 1900-luvun taitteessa oli selittää miksi ominaisvärähtelyjen joukko (so. poikkeusparametrien joukko) on diskreetti; kysymys palautui differentiaaliyhtälöiden kautta tyyppiä (0.2) oleviin yhtälöihin.

Huomaa, että funktio $K(x, s)$ voi olla hyvinkin monimutkainen, eikä yhtälön suora integrointi, tavalla tai toisella, voi tulla kysymykseen; korkeintaan voimme hakea numeerisia ratkaisuja, kunhan yhtälöt kunnolla ymmärretään. Miten yhtälöitä (0.2) voisi silloin lähestyä ?

Tilanteen selvittämistä varten identifioidaan ensin (mahdollisten) ratkaisujen avaruus; luonnollinen arvaus on seuraava vektoriavaruus, joka esiintyy jo Analyysi I:ssä,

$$C(0, 1) = \{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ jatkuva välillä } [0, 1] \}.$$

Avaruuteen liittyy luonnollinen ”etäisyyden” mitta, eli normi (tästä myöhemmin paljon lisää):

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad f \in C(0, 1).$$

Pari $(C(0, 1), \|\cdot\|_\infty)$ tulee olemaan tyyppillinen esimerkki *Banachin avaruudesta*.

Yhtälöön (0.2) liittyy operaattori (kuvaus)

$$T : C(0, 1) \rightarrow C(0, 1), \quad (Tf)(x) = \int_0^1 K(x, s)f(s)ds, \quad x \in [0, 1].$$

Huomataan, että tämä kuvaus on avaruuden $C(0, 1)$ luonnollisen yhteenlaskun suhteen *lineaarinen*, so.

$$T(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 T(f) + \lambda_2 T(g) \quad \forall f, g \in C(0, 1), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Havaitaan, että yhtälö (0.2) voidaan kirjoittaa operaattoriyhtälömuotoon

$$(I - \lambda T)(f) = f - \lambda T(f) = g$$

(Tässä I on avaruuden $C(0, 1)$ identtinen kuvaus.) Kysymys on siis siitä, onko lineaarinen operaattori $I - \lambda T$ kääntyvä (bijektio) $C(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$! Integraaliyhtälömme (0.2) on nyt muuttunut lineaarisen operaattorin ominaisarvotehtäväksi, ja ratkaisua varten meidän tulee kehittää ”lineaarialgebrallisia” menetelmiä vektoriavaruuksissa kuten $C(0, 1)$.

Nopeasti havaitaan kuitenkin selvä pulma: vektoriavaruus $C(0, 1)$ on *ääretönulotteinen*! (Polynomien perusominaisuuksista seuraa, että monomien muodostama joukko $\{t^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ on vapaa.) Ei siis ole ollenkaan selvää mitkä/millä ehdoin lineaarialgebran tulokset yleistyvät näihin uusiin avaruuksiin. Tai mitä operaattoreilta vaaditaan, että lineaarialgebran ominaisarvotehtävät yleistyvät näihin ääretönulotteisiin tilanteisiin.

Funktionaalianalyysi pyrkii vastaamaan tämän tyyppisiin kysymyksiin, kehittämään ääretönulotteisten avaruuksien teoriaa silmälläpitäen esim. yllä kuvatun kaltaisia sovelluskohteita. Tällä kurssilla selvitämme Banach avaruuksien perusominaisuudet, keskeisimmät esimerkit (funktio- yms.)avaruuksista sekä myös Banach avaruuksien operaattoreiden perusominaisuudet. Pyrimme myös antamaan esimerkkejä teorian sovelluksista, ja tulemme mm. osoittamaan yo.

väitteen i); jos aika riittää kurssin loppupuolella voidaan myös tarkastella kysymystä ii).

Sana ”funktionaali” tarkoitti alunperin (noin 1880–1910) sellaista jatkuvaa kuvausta, jonka määrittelyjoukko on jokin ”funktioavaruus”; tyypillisesti

$$\varphi: C(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(s) \, ds, \quad \text{tai}$$

$$\phi: C(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(f) = \int_0^1 f(s)^2 \, ds \quad (\text{epälineaarinen funktionaali}).$$

Nyttemmin termin käyttö on hieman muuttunut, kuten myöhemmin huomaamme.

Funktionaalianalyysin *sovellusaloja* ovat muun muassa

- (muu) klassinen analyysi (reaali- ja kompleksianalyysi, harmoninen analyysi)
- differentiaali-, osittaisdifferentiaali- ja integraaliyhtälöt (DY, ODY, IY)
- matemaattinen fysiikka (kvanttimekaniikka, ...)
- optimointi
- variaatiolaskenta ja approksimaatioteoria
- dynaamiset systeemit
- numeerisen analyysin teoria
- tn-teoria ja stokastiikka
-

Kääntäen, analyysi ja sen sovellukset synnyttävät jatkuvasti uusia funktionaalianalyysin tutkimuksia.

1. METRIKKA JA METRINEN AVARUUS

Funktionaalianalyysin peruskurssin taustalla on metrinen avaruuksien peruskäsitteet (avoimet joukot, pistejonon suppeneminen, kuvauksen jatkuvuus yms.). Palautamme aluksi mieliin joitakin yleisiä asioita.

1.1. Määritelmä. Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko. Kuvaukseen $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ on *metriikka* X :ssä, jos

$$(M1) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ kaikilla } x, y, z \in X \text{ (”kolmioepäyhtälö”)}$$

$$(M2) \quad d(y, x) = d(x, y) \text{ kaikilla } x, y \in X$$

$$(M3) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \text{ (Huom: } d(x, y) \geq 0 \text{ kaikilla } x, y \in X.)$$

Sanomme, että (X, d) eli joukko X varustettuna metriikalla d , on *metrinen avaruus* (yleensä jätetään d merkitsemättä, jos se selviää yhteydestä).

Huomautus.

- (1) Funktionaalianalyysin peruskurssilla joukko X on (yleensä) vektoriarvaruus ja metriikka d on (yleensä) jonkin normin indusoima (vrt. luku 2).
- (2) Kuvaukseen $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ on *semimetriikka*, jos d toteuttaa ehdot (M1), (M2) sekä ehdon

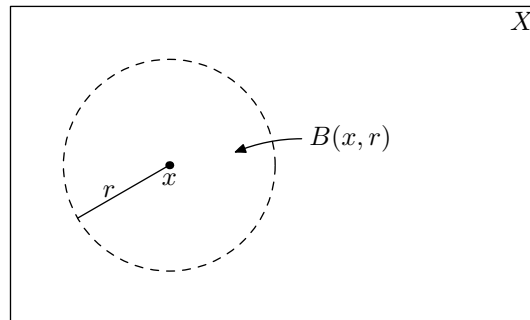
$$(M4) \quad d(x, x) = 0 \text{ kaikilla } x \in X.$$

(Saattaa siis olla $d(x, y) = 0$ vaikka $x \neq y$.)

Merkintöjä: Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $x \in X$, $r > 0$:

$$B(x, r) = \{ y \in X : d(x, y) < r \} \text{ avoin } x\text{-keskinen, } r\text{-säteinen pallo}$$

$$\overline{B}(x, r) = \{ y \in X : d(x, y) \leq r \} \text{ suljettu } x\text{-keskinen, } r\text{-säteinen pallo.}$$



KUVA 1. Avoin pallo $B(x, r)$ metrisessä avaruudessa (X, d)

Oletamme, että lukija on tutustunut metristen avaruuksien perusteisiin (vrt. esim. [Väisälä : Topologia I]). Lukijan tulisi kerrata, mitä metrisissä avaruuksissa tarkoittavat käsitteet avoin joukko, suljettu joukko ja kompakti joukko; samoin mitä tarkoitetaan ympäristöllä, ympäristökannalla, aliavaruudella, suppenevalla pistejonolla, jatkuvalla kuvauksella,..... Muistamisen helpottamiseksi listaamme alla lyhyesti eräitä näistä käsitteistä.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus:

- avoimet ja suljetut joukot: joukko $A \subset X$ on *avoin*, jos jokaista $a \in A$ vastaa sellainen $r = r(a) > 0$, että avoin pallo

$$B(a, r) \subset A.$$

$A \subset X$ on *suljettu*, jos komplementti

$$A^c = \{ x \in X : x \notin A \} \text{ on avoin.}$$

- metriikan indusoima *topologia* on joukkoperhe

$$\tau_d = \{ A \subset X : A \text{ on avoin } X\text{:ssä} \}.$$

- ympäristökanta, relatiivitopologia
- jonon raja-arvo ja suppeneminen: jono $(x_n) \subset X$ *suppenee* kohti $x \in X$, jos

$$d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Siis jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x) < \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_\varepsilon$. Merkintä:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \text{ tai } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

- jatkuva kuvaus : Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on *jatkuva* pisteessä $a \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$, että

$$d'(f(a), f(y)) < \varepsilon \quad \text{aina kun } d(a, y) < \delta \text{ (ja } y \in X).$$

f on *jatkuva* X :ssä jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $a \in X$.

- kompakti joukko (Heine-Borelin lause, ...)

1.2. Esimerkki. \mathbb{R}^n varustettuna euklidisella metriikalla

$$(1.3) \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2} = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2},$$

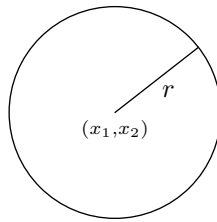
kun $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. (Erikoistapaus $n = 1$: $d(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbb{R}$).

Kuvaus d on metriikka: TopoI, Vektorianalyysi (tai myöhemmin luvussa 2 avaruuden ℓ^p yhteydessä). Kolmioepäyhtälö on tässä tapauksessa (epä-triviaali) arvio

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - z_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n |y_j - z_j|^2}$$

kaikilla $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

Tapauksessa $n = 2$ ja $x = (x_1, x_2)$ siis piste $y = (y_1, y_2) \in B(x, r)$ jos ja vain jos $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < r^2$.



KUVA 2. Avoin tason \mathbb{R}^2 pallo $B((x_1, x_2), r)$

Huomautus. Vastaavasti kaava (1.3), kun $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, määrittelee metriikan avaruuteen \mathbb{C}^n .

Metrinen avaruus (X, d) on *separoituva*, jos on olemassa sellainen numeroituva osajoukko $A \subset X$, että joukon A sulkeuma $\bar{A} = X$. Sanomme tällöin myös, että A on *tiheä* X :ssä.

Palautetaan mieliin, että sulkeuma määritellään metriikan d avulla seuraavasti: jos $A \subset X$, niin piste $x \in \bar{A}$ jos jokaisella $r > 0$ pätee $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Erityisesti:

$$x \in \bar{A} \iff \text{on olemassa sellainen pistejono } (a_n) \subset A, \text{ että } d(a_n, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Separoituvuusehto $\bar{A} = X$ tarkoittaa siis: jos $y \in X$ ja $\varepsilon > 0$ ovat mielivaltaisia, niin on olemassa sellainen alkio $a \in A$, että $d(a, y) < \varepsilon$.

1.4. Esimerkki. (\mathbb{R}^n, d) on separoituva, kun d on euklidinen etäisyys ja $n = 1, 2, \dots$

Todistus. Analyysi I:n nojalla tiedämme, että $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, missä \mathbb{Q} on rationaalilukujen joukko. Jos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$ on annettu, niin valitaan jokaisella $j \in \{1, \dots, n\}$ sellainen $q_j \in \mathbb{Q}$, että

$$|x_j - q_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tällöin $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^n$, joka on numeroituva joukko (koska \mathbb{Q} on numeroituva) ja

$$d(x, q) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j - q_j|^2}_{< \frac{\varepsilon^2}{n}}} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

□

Lopuksi käyttökelpoinen kriteeri ei-separoituvuudelle:

1.5. Lause. *Olkoon X metrinen avaruus ja oletetaan, että on olemassa ylinumeroituva kokoelma \mathcal{U} avaruuden X avoimia pistevieraita epätyhjiä osajoukkoja (siis aina jos $U, V \in \mathcal{U}$ ja $U \neq V$, niin $U \cap V = \emptyset$). Silloin X ei ole separoituva.*

Todistus. Vastaoletus: Oletetaan, että X on separoituva. Tällöin $X = \overline{A}$, missä $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ on numeroituva.

Jos $U \in \mathcal{U}$, niin $U \subset X$ on avoin ja epätyhjä. Tällöin on olemassa sellaiset $a \in U$ ja $r > 0$, että $B(a, r) \subset U$. Vastaoletuksen perusteella voidaan kiinnittää sellainen $n_U \in \mathbb{N}$, että $a_{n_U} \in B(a, r) \subset U$. Saadaan siis kuvaus $\alpha: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{N}$, $\alpha(U) = n_U$ kun $U \in \mathcal{U}$.

Näin saatu kuvaus α on *injektio*: jos $U, V \in \mathcal{U}$ ja $U \neq V$, niin oletuksen nojalla $U \cap V = \emptyset$. Tämä tarkoittaa, että $a_{n_U} \neq a_{n_V}$ eli $n_U \neq n_V$, joten kuvaus α on injektio $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{N}$.

Tästä kuitenkin seuraisi, että \mathcal{U} on numeroituva (mieti miksi!), mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. □

Harjoitustehtäviä

1:1

2. NORMI JA NORMIAVARUUS

Olkoon E vektoriavaruus (eli lineaariavaruus) skalaarikuntana $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Kurssilla Lineaarialgebra I & II määriteltiin vain \mathbb{R} -kertoimiset vektoriavaruudet, mutta kompleksikertoimiset avaruudet määritellään täysin analogisesti: Avaruudessa E on yhteenlaskun $x + y$ lisäksi annettu skalaarilla kertominen $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, siis kuvaus $\mathbb{C} \times E \rightarrow E$, joka toteuttaa ehdot

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \quad \text{ja} \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

kaikilla vektoreilla $x, y \in E$ ja skalaareilla $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Useimmiten kurssin tulokset ja käsitteet toimivat täysin samoin molemmilla skalaarikunnan valinnoilla, \mathbb{R} tai \mathbb{C} , ja käytämme silloin skalaarikunnalle merkintää \mathbb{K} . Jos skalaarikunta pitää spesifioida, siitä huomautetaan erikseen.

2.1. Esimerkkejä. (1) $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$ on \mathbb{C} -kertoiminen vektoriavaruus. n -vektorien summa ja skalaarilla kertominen määritellään koordinaatteittain kuten vektoriavaruuden \mathcal{R}^n tapauksessa.

(2) Myös kompleksisten polynomien avaruus

$$\mathcal{P} = \left\{ p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

on \mathbb{C} -kertoiminen vektoriavaruus. Summa $p + q$ ja skalaarilla λp kertominen määritellään pisteittäin, kun $p, q \in \mathcal{P}$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimensio: Kerrataan ensin lineaarialgebran käsitteitä. Jos $A \subset E$ on osajoukko, sen virittämä E :n vektorialiavaruus on

$$(2.2) \quad \text{span}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K}, k = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Lineaarialgebrasta muistetaan myös, että vektorijono $x_1, \dots, x_n \in E$ on lineaarisesti riippumaton eli vapaa, jos

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \bar{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Honkasalon monisteen Lineaarialgebra I sivulla 50 on todistettu seuraava tulos, jonka oletamme tunnetuksi:

Vektoriavaruus E on äärellisulotteinen (so. äärellisen vektorijoukon virittämä) jos ja vain jos E :n vapaiden jonojen *pituuudet* ovat ylhäältä rajoitetut, so. on olemassa sellainen luku $M < \infty$, että jokaisessa E :n vapaassa jonossa on korkeintaan M vektoria.

Muistutetaan vielä, että äärellisulotteisen avaruuden E *dimensio* $\dim(E)$ on E :n kannan (so. vapaan virittäjäjoukon) vektorien lukumäärä; tämä lukumäärä on kannasta riippumaton luku. (Tässä (x_1, \dots, x_n) on E :n kanta jos ja vain jos jokaisella vektorilla $x \in E$ on yksikäsitteinen esitys $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ lineaarikombinaationa.)

Tämä kaikki toimii myös, kun kerroinkuntana on \mathbb{C} . Esimerkiksi yllä \mathbb{C}^n on äärellisulotteinen (tarkemmin, n -ulotteinen). Nimittäin, (e_1, \dots, e_n) on eräs kanta vektoriavaruudelle \mathbb{C}^n , missä $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{C}^n$. Selvästi $z = (z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=1}^n z_k e_k$ kaikilla $z \in \mathbb{C}^n$.

Toisaalta, \mathcal{P} on ääretönulotteinen: Polynomit $p_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, muodostavat vapaan joukon (miksi?), ja koska tuo joukko on ääretön, yo. tuloksen nojalla $\dim(\mathcal{P}) = \infty$.

Keskeinen idea Funktionaalianalyysissä on tuoda hyödyllistä ”rakennetta” esimerkiksi funktioiden muodostamiin vektoriavaruuksiin. Ensimmäisessä askeleessa ”etäisyyskäsite” luodaan erilaisten normien avulla.

2.3. Määritelmä. Olkoon E \mathbb{K} -kertoiminen vektoriavaruus. Kuvaus $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ on *normi* E :ssä, jos

$$(N1) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{kaikilla } x, y \in E \text{ (”kolmioepäyhtälö”)}$$

$$(N2) \quad p(ax) = |a|p(x) \quad \text{kaikilla } x \in E, a \in \mathbb{K} \text{ (”homogeenisuus”)}$$

$$(N3) \quad p(x) = 0 \iff x = \bar{0} \text{ (nolla-alkio } E\text{:ssä)}$$

Tavallisesti merkitään $p(x) = \|x\|$. Paria $(E, \|\cdot\|)$ eli vektoriavaruutta E varustettuna normilla $\|\cdot\|$ sanotaan *normiavaruudeksi*.

Huomautus.

(1) Normi $\|\cdot\|$ edellyttää, että määrittelyjoukko E on lineaariavaruus:

$$x + y \in E \text{ ja } ax \in E \text{ aina kun } x, y \in E \text{ ja } a \in \mathbb{K}.$$

(2) Kuvaus $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ on *seminormi* E :ssä, jos p toteuttaa ehdot (N1) ja (N2).¹ Tällöin

$$p(\bar{0}) = p(0 \cdot \bar{0}) = |0|p(\bar{0}) = 0,$$

ja $\{x \in E : p(x) = 0\}$ on avaruuden E vektorialiavaruus ehtojen (N1) ja (N2) nojalla.

¹tämä yleisempi käsite on joskus tarpeen; tällä kurssilla suhteellisen harvoin

2.4. Esimerkkejä. (1)

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \quad , \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

on avaruuden \mathbb{R}^n *euklidinen* normi, kun $n = 1, 2, \dots$. Ehdot (N1)-(N3) toteutuvat; katso Topo I. Hieman myöhemmin tämä todistetaan myös erikoistapauksena yleisemmän avaruuden ℓ^p yhteydessä. Vastaavasti kaava

$$\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,$$

antaa euklidisen normin avaruuteen \mathbb{C}^n . Ehto (N1) on tässä muotoa

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j + w_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n |w_j|^2}.$$

(*Muistutus*: jos $z = a + ib \in \mathbb{C}$, niin $|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2$, missä $\bar{z} = a - ib$. Tapauksessa $n = 1$ pätee edellä $|z + w| \leq |z| + |w|$ kun $z, w \in \mathbb{C}$. Tämä on *kompleksilukujen* kolmioepäyhtälö, joka usein tulee käyttöön jatkossa. Todistusidea:

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq (|z| + |w|)^2.$$

Viimeisessä vaiheessa käytimme arviota $|\operatorname{Re}(u)| \leq |u|$, $u \in \mathbb{C}$.)

(2) Kun A on mielivaltainen joukko, asetetaan

$$B(A, \mathbb{K}) := \{ f: A \rightarrow \mathbb{K} : \|f\|_\infty := \sup_{t \in A} |f(t)| < \infty \}.$$

Tämä on rajoitettujen kuvausten $A \rightarrow \mathbb{K}$ vektoriavaruus, jos asetetaan

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad (af)(t) = af(t) \quad \text{kun } f, g \in B(A, \mathbb{K}), a \in \mathbb{K}.$$

Helposti nähdään, että $\|f\|_\infty$ on normi:

Perustelu. Olkoon $f, g \in B(A, \mathbb{K})$ ja $t \in A$. Tällöin

$$\begin{aligned} |(f + g)(t)| &= |f(t) + g(t)| \stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} |f(t)| + |g(t)| \stackrel{\text{määr.}}{\leq} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ \sup_{t \in A} \text{yli} &\|f + g\|_\infty = \sup_{t \in A} |(f + g)(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

eli ehto (N1) on voimassa. (Edellä Δ - ey tarkoittaa reaali- tai kompleksilukujen kolmioepäyhtälöä, riippuen skalaarikunnasta).

Olkoon $a \in \mathbb{K}$ skalaari. Tällöin

$$|(af)(t)| = |af(t)| = |a||f(t)| \stackrel{\text{sup yli t:n}}{\leq} \|af\|_\infty = |a|\|f\|_\infty$$

eli myös ehto (N2) on voimassa. Koska

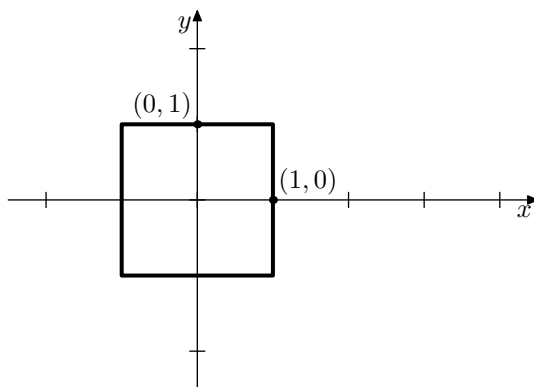
$$\begin{aligned} \|f\|_\infty = \sup_{t \in A} |f(t)| = 0 &\iff f(t) = 0 \quad \forall t \in A \\ &\iff f \text{ on } \bar{0}\text{-funktio,} \end{aligned}$$

niin myös (N3) toteutuu. □

(3) Myös \mathbb{R}^n :ssä (tai \mathbb{C}^n :ssä) voidaan määritellä normi edellisen kohdan erikoistapauksena: tällöin $A = \{1, \dots, n\}$, jolloin saadaan normi

$$\|x\|_\infty := \sup(|x_1|, \dots, |x_n|),$$

missä $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Vaikka tämä normi antaa myös euklidisen topologian (vrt. Esim 2.13 alla), sup-normin ”geometria” on hieman erilainen. Esimerkiksi dimensiossa $n = 2$ avaruuden $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ vastaava suljettu yksikköpallo $B_E = \{x \in E : \|x\|_\infty \leq 1\}$ näyttää seuraavalta:



KUVA 3. Pallo B_E avaruudessa $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$

(4) Toinen erikoistapaus (2)-kohdasta saadaan, kun $A = \mathbb{N}$. Tällöin merkitään

$$\ell^\infty := B(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K} \forall n, \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$

Avaruudessa ℓ^∞ siis $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ ja $a(x_n) = (ax_n)$ kun $(x_n), (y_n) \in \ell^\infty$ ja $a \in \mathbb{K}$. Olkoon $e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, \dots) \in \ell^\infty$ kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin joukko $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ on lineaarisesti riippumaton (Miksi?), joten $\dim(\ell^\infty) = \infty$.

Seuraavaksi osoitetaan pari normin perusominaisuutta, joista seuraavan lauseen (2)-kohta liittyy normiavaruudet metrisiin.

2.5. Lause. *Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Tällöin*

(1) *kaikilla $x, y \in E$ on voimassa (ns. Δ - ey ”alaspäin”)*

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Erityisesti, kuvauksena normi $x \mapsto \|x\|$ on tasaisesti jatkuva E :ssa.

(2) kuvaus $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$, $d(x, y) := \|x - y\|$ on metriikka avaruudessa E . Erityisesti $\|x\| = d(x, \bar{0})$, $x \in E$.

Todistus. (1) (vrt. Topo I, Vektorianalyysi) Olkoon $x, y \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x - y + y\| \stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} \|x - y\| + \|y\| \\ &\implies \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \\ &\stackrel{\text{symm}}{\implies} \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \stackrel{\text{(N2)}}{=} \|x - y\| \\ &\implies \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \end{aligned}$$

(2) (vrt. Topo I) kaikilla $x, y, z \in E$ on voimassa

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \stackrel{\text{(N1)}}{\leq} \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= d(x, y) + d(y, z), \end{aligned}$$

joten (M1) toteutuu. Ehto (M2) seuraa välittömästi ehdosta (N2). Edelleen

$$d(x, y) = \|x - y\| = 0 \stackrel{\text{(N3)}}{\iff} x - y = \bar{0} \iff x = y,$$

joten myös (M3) on voimassa. □

Normiavaruudessa voidaan siis puhua normin indusoimasta metrisen topologian käsitteistä, kuten avoimista palloista ja joukoista, jonojen suppenemisesta, jatkuvista funktioista jne. Metrisinä avaruuksina funktioavaruudet voivat olla melko "suuria", esimerkkinä olkoon vaikkapa ℓ^∞ , joka ei ole edes separoituva (vrt. Harjoitukset). Useille käytännössä eteen tuleville funktioavaruuksille separoituvuus toisaalta pätee; myöhemmin osoitamme tämän esimerkiksi $C(0, 1)$:lle.

Seuraava esimerkki valaisee pistejonojen suppenemisen (avaruudessa ℓ^∞).

2.6. Esimerkki. Olkoon $y^{(n)} = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^\infty$ (alussa n kpl ykkösiä) kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko jono $(y^{(n)})_{n=1}^\infty$ avaruudessa $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$?

Ratkaisu. Merkitään $y^{(n)} = (y_k^{(n)})_{k=1}^\infty \in \ell^\infty$, jolloin siis määritelmän mukaan $y_k^{(n)} = 1$ kun $1 \leq k \leq n$ ja $y_k^{(n)} = 0$ kun $k > n$. Olkoon $y = (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell^\infty$ sellainen jono että

$$\|y^{(n)} - y\|_\infty = \sup_k |y_k - y_k^{(n)}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Erityisesti, kiinteällä $k \in \mathbb{N}$ pätee $|y_k - y_k^{(n)}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Tästä seuraa, että $y_k = \lim_n y_k^{(n)} = 1$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$, eli raja-arvojonon on oltava $y =$

$(1, 1, 1, \dots) \in \ell^\infty$. Toisaalta, $y^{(n)} - (1, 1, 1, \dots) = (0, \dots, 0, 1, 1, \dots)$ (alussa n kpl nollia), joten

$$\|y^{(n)} - (1, 1, 1, \dots)\|_\infty = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tämä tarkoittaa, että jono $(y^{(n)})_{n=1}^\infty$ ei voi supeta avaruudessa $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

(Vaihtoehtoinen tapa: selvästi $y^{(n)} = e_1 + \dots + e_n$ kun $n \in \mathbb{N}$, missä $e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, \dots) \in \ell^\infty$ kun $n \in \mathbb{N}$. Havaitaan, että kaikilla $n > m$ pätee

$$\|y^{(n)} - y^{(m)}\|_\infty = \|e_{m+1} + \dots + e_n\|_\infty = 1.$$

Tällöin jono $(y^{(n)})_{n=1}^\infty$ ei voi supeta avaruudessa $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, koska jonon alkiot eivät edes toteuta Cauchyn ehtoa, vrt. Lause 3.2 alla).

Normiavaruuden luonnolliset rakenteet ovat yhteensopivat, toisin sanoen:

2.7. Lause. Normiavaruudessa $(E, \|\cdot\|)$ kuvaukset

$$\psi_1: E \times E \rightarrow E, \quad \psi_1(a, b) := a + b, \quad \text{ja}$$

$$\psi_2: \mathbb{K} \times E \rightarrow E, \quad \psi_2(\lambda, a) := \lambda a$$

ovat jatkuvia.

Todistus. Harjoitukset 1. □

Huomautus. Normiavaruuden E metriikka on *siirto-* eli *translaatioinvariantti*:

$$d(x + a, y + a) = \|x + a - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

kaikilla $x, y, a \in E$. Joitakin seurauksia:

(i) normin $\|\cdot\|$ avoimelle pallolle pätee $B(a, r) = a + B(\bar{0}, r)$ kaikilla $a \in E$ ja $r > 0$. Tästä, sekä ominaisuudesta (N2) saadaan, että joukko $A \subset E$ on avoin (vast. suljettu, kompakti) jos ja vain jos $x_0 + A$ ja λA ovat avoimia (vast. suljettuja, kompakteja), kun $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ja $x_0 \in E$ ovat mielivaltaisia.

(ii) Jos $x_0 \in U \subset E$, niin U on pisteen x_0 ympäristö jos ja vain jos $U - x_0$ on nolla-alkion $\bar{0}$ ympäristö.

(iii) Pistejono $(x_n)_{n=0}^\infty \subset E$ suppenee alkioon $y \in E$ jos ja vain jos $x_n - y \rightarrow \bar{0}$ kun $n \rightarrow \infty$ avaruudessa E .

Edellä käytimme merkintöjä

$$x_0 + A = \{ x_0 + y : y \in A \} \subset E,$$

$$\lambda A = \{ \lambda x : x \in A \}.$$

Yleisemmin, jos $A \subset E$, $B \subset E$ ja $\Lambda \subset \mathbb{K}$, niin asetetaan

$$A + B = \{ x + y : x \in A, y \in B \},$$

$$\Lambda A = \{ \lambda x : \lambda \in \Lambda, x \in A \}.$$

Monet funktioavaruuksien konvergenssikäsitteistä voidaan kuvata normin avulla (ja kääntäen, normi antaa konvergenssikäsitteen):

2.8. Esimerkkejä. (1) Kun avaruus $C(0, 1) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \text{ jatkuva} \}$ varustetaan tavallisella normillaan $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$, pätee

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \text{ kun } n \rightarrow \infty \Leftrightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ tasaisesti joukossa } [0, 1].$$

(Kompleksisessä tapauksessa $f = f_1 + if_2$ on jatkuva $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ jos ja vain jos reaali-osa f_1 ja imaginaari-osa f_2 ovat molemmat jatkuvia funktioita $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.)

(2) Toisaalta $C(0, 1)$:ssä voidaan määritellä myös normi $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$, kun $f \in C(0, 1)$. (Selvitä itsellesi miksi $\|\cdot\|_1$ on normi $C(0, 1)$:ssä!). Nyt pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ 'keskimäärin'}.$$

Esimerkiksi, jos $f_n(t) = t^n$, niin $f_n \rightarrow \bar{0}$ 'keskimäärin' eli normin $\|\cdot\|_1$ mielessä, koska $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$. Toisaalta jono (f_n) ei konvergoi sup-normin mielessä 0 -funktioon, sillä $\|f_n\|_\infty = 1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Annetuista normiavaruuksista saadaan muodostettua uusia avaruuksia monella eri tavalla. Tulemme jatkossa näkemään tästä useitakin esimerkkejä. Aloitamme seuraavalla yksinkertaisella periaatteella.

2.9. Lause. *Jokainen normiavaruuden $(E, \|\cdot\|)$ vektorialiavaruus F on normiavaruus $(E; n$ indusoimalla normilla varustettuna).*

2.10. Esimerkkejä. (1) Voimme esimerkiksi valita $E = B([0, 1], \mathbb{K})$, jolla on aliavaruutena jatkuvien funktioiden avaruus $F = C(0, 1)$. (*Lisätieto:* $C(0, 1)$ on avaruuden $B([0, 1], \mathbb{K})$ suljettu vektorialiavaruus sup-normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen (myöhemmin).)

(2) Olkoon $E = \ell^\infty$; seuraavat jonoavaruudet ovat sen vektorialiavaruuksia:

$$c := \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : \lim_n x_n \text{ on olemassa}\},$$

$$c_0 := \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : \lim_n x_n = 0\}.$$

Molemmissa normi on siis $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. Edellä $x_n \in \mathbb{K}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos $x_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$, niin jono (x_n) suppenee jos ja vain jos reaali- ja imaginaari- osat (a_n) ja (b_n) suppenevät. (*Lisätieto:* c ja c_0 ovat avaruuden ℓ^∞ suljettuja vektorialiavaruuksia.)

Monesti on hyödyllistä muuttaa normia, ilman että sen määräämä topologia tai konvergenssi muuttuu. Tämä idea johtaa seuraavaan käsitteeseen.

2.11. **Määritelmä.** Vektoriavaruuden E normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat *ekvivalentteja*, jos on olemassa vakiot $C_1, C_2 > 0$, joille

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

2.12. **Lause.** Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ *ekvivalentteja* normeja avaruudessa E . Tällöin ne määrittelevät avaruudessa E samat avoimet ja suljetut joukot (eli ne määrittävät saman topologian; siis $\tau_{\|\cdot\|_1} = \tau_{\|\cdot\|_2}$, missä

$$\tau_{\|\cdot\|_1} = \{U \subset E : U \text{ on } \|\cdot\|_1 - \text{avoin joukko}\}.)$$

Todistus. Harjoitukset. □

2.13. **Esimerkki.** (1) Avaruuden \mathbb{C}^n normit

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

ovat ekvivalentit:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Nimittäin, jos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ja $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ on sellainen indeksi, että $\|x\|_\infty = |x_{j_0}|$, niin

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \leq \sqrt{n|x_{j_0}|^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

(Tulemme myöhemmin näkemään, että itse asiassa jokaisen *äärellisulotteisen* vektoriavaruuden *kaikki* normit ovat ekvivalentit.)

(2) Olkoon $\mathcal{P} = \{p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ polynomien muodostama vektoriavaruus. Tällöin esimerkiksi

$$\|p\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k| \quad \text{ja} \quad \|p\|_2 = \max_k |a_k|, \quad \text{kun } p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k,$$

ovat hyvin määriteltyjä (Miksi?) normeja (Miksi?) avaruudessa \mathcal{P} . Normit eivät ole kuitenkaan ekvivalentteja: jos $p_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + \dots + z^n$, niin jokaisella n pätee $\|p_n\|_2 = 1$ mutta $\|p_n\|_1 = n + 1$. Koska tässä n voidaan valita mielivaltaisen suureksi, normit ovat epäekvivalentit.

2.14. **Esimerkki.** Merkitään

$$C^k(0, 1) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} : f, f', \dots, f^{(k)} \text{ ovat jatkuvia välillä } [0, 1]\},$$

kun $k \in \mathbb{N}$. Tässä $f^{(j)}$ on funktion f j :s derivaatta, ja $f^{(0)} = f$. Normit

$$\|f\| = \sup_{0 \leq j \leq k} \sup_{0 \leq t \leq 1} |f^{(j)}(t)| = \sup_{0 \leq j \leq k} \|f^{(j)}\|_{\infty}, \text{ ja}$$

$$\| \|f\| \| = \sum_{j=0}^k \sup_{0 \leq t \leq 1} |f^{(j)}(t)| = \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_{\infty}$$

ovat ekvivalentteja avaruudessa $C^k(0, 1)$, minkä todistus jää harjoitustehtäväksi.

Ääretönulotteisessa normiavaruudessa avoimet (tai suljetut) joukot voivat joskus tuottaa yllätyksiä verrattuna euklidisen avaruuden $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ tilanteeseen.

2.15. Esimerkki. Olkoon

$$A = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 : |x_n| < \frac{1}{n} \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}\}.$$

Tällöin A ei ole avoin joukko normiavaruudessa $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$.

Nimittäin selvästi nollajono $\bar{0} = (0, 0, \dots) \in A$. Näytämme, että $\bar{0}$ ei ole joukon A sisäpiste, toisin sanoen, ei ole olemassa sellaista $r > 0$, että avoin pallo $B(\bar{0}, r) \subset A$.

Olkoon $r > 0$ annettu ja $y^{(n)} = (0, 0, \dots, 0, r/2, 0, \dots)$ (missä $r/2$ on jonon n :s koordinaatti), kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $\|y^{(n)}\|_{\infty} = r/2$, eli $y^{(n)} \in B(\bar{0}, r)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta, jos kiinnitetään $n \in \mathbb{N}$ jolle $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$, niin erityisesti $y^{(n)} \notin A$. Näin siis $B(\bar{0}, r) \subset A$ ei ole voimassa millään $r > 0$.

ℓ^p -AVARUUDET

Normiavaruudet ℓ^{∞} , c ja c_0 ovat esimerkkejä klassisista Banachin (jono)avaruuksista. Mainitsemme vielä esimerkkinä avaruuden

$$\ell^1 = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\},$$

joka on *itseisesti* eli *absoluuttisesti suppenevien sarjojen* avaruus. Myös tässä $\|\cdot\|_1$ on helppo todistaa normiksi, koska kolmioepäyhtälö seuraa arviosta $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$ summaamalla indeksin n suhteen. Vaikeammin käsiteltäviä esimerkkejä ovat muut ns. ℓ^p -avaruudet, joita nyt ryhdymme määrittelemään.

2.16. Määritelmä. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Tällöin

$$\ell^p := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : \|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Tässä $x_n \in \mathbb{K}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja jonojen summa ja skalaarilla kertominen on määritelty koordinaateittain: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ ja $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$ jonoille (x_n) , (y_n) ja $\lambda \in \mathbb{K}$.

Seuraavassa p ja q ovat reaalilukuja, jotka täyttävät ehdot:

$$p > 1, \quad q > 1 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sanomme lukuja p ja q toistensa *duaaliekspONENTEIKSI*. Esimerkiksi $p = q = 2$ tai $p = 7$, $q = \frac{7}{6}$ ovat duaaliekspONENTTIPAREJA. Edelleen on voimassa, että $q = \frac{p}{p-1}$ ja $p + q = pq$.

Seuraavana tavoitteena on osoittaa, että $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ on normiavaruus, ja erityisesti että kolmioepäyhtälö on voimassa $\|\cdot\|_p$:lle.

2.17. Lemma. *Jos $a \geq 0$, $b \geq 0$ sekä p ja q ovat duaaliekspONENTTEJA, niin*

$$(2.18) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Todistus. Jos $a = 0$ tai $b = 0$, niin (2.18) on voimassa. Voimme olettaa: $a, b > 0$. Merkitään

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}, \quad t > 0.$$

Tällöin $\varphi'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1} = \frac{t^{p+q}-1}{t^{q+1}}$, joten $\varphi'(t) < 0$, kun $0 < t < 1$ ja $\varphi'(t) > 0$, kun $t > 1$. Siispä φ saa pienimmän arvonsa, kun $t = 1$, eli kaikilla $t > 0$ on voimassa

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \varphi(1) \leq \varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}.$$

Sijoitetaan $t = a^{1/q}b^{-1/p}$, jolloin saadaan

$$1 \leq \frac{a^{p/q}}{pb} + \frac{b^{q/p}}{qa} \iff ab \leq \frac{a^{\frac{p}{q}+1}}{p} + \frac{b^{\frac{q}{p}+1}}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

koska $\frac{p}{q} + 1 = p$ ja $\frac{q}{p} + 1 = q$. □

2.20. Lause (Hölderin epäyhtälö jonoille). *Olkoot $1 < p, q < \infty$ sellaiset, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin*

$$(H) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

kaikilla jonoilla $(x_k) \in \ell^p$, $(y_k) \in \ell^q$ (tässä $x_k, y_k \in \mathbb{K}$ kaikilla k ja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Näin siis

$$\|(x_k y_k)\|_1 \leq \|(x_k)\|_p \|(y_k)\|_q,$$

ja erityisesti $(x_k) \in \ell^p$, $(y_k) \in \ell^q \implies$ "tulojono" $(x_k y_k) \in \ell^1$.

Huomautus. Kun epäyhtälöön (H) sijoitetaan luvut, jotka toteuttavat lisäehdot $0 = x_k = y_k$ kaikilla $k > n$, saadaan erikoistapauksena äärellinen versio Hölderin epäyhtälöstä:

$$(H') \quad \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

kaikilla $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ ja $n = 1, 2, 3, \dots$

Todistus. Merkitään

$$A = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \| (x_k) \|_p, \quad B = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \| (y_k) \|_q,$$

jolloin $A \geq 0, B \geq 0$. Jos $A = 0$ tai $B = 0$, niin $x_k = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ tai $y_k = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin (H) on ilmeinen, sillä vasen puoli = 0. Voidaan siis olettaa: $A > 0, B > 0$. Kiinnitetään $k \in \mathbb{N}$ ja sovelletaan Lemmaa 2.17 luvuille $a = \frac{|x_k|}{A}$ ja $b = \frac{|y_k|}{B}$. Saadaan

$$\frac{|x_k|}{A} \cdot \frac{|y_k|}{B} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_k|^q}{B^q}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Summataan nämä arviot muuttujan k suhteen, jolloin

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{A} \cdot \frac{|y_k|}{B} \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y_k|^q}{B^q} \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{A^p} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}_{=A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{B^q} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q}_{=B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Kertomalla puolittain luvulla AB saadaan lopulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq AB = \| (x_k) \|_p \| (y_k) \|_q.$$

□

Hölderin erikoistapauksella $p = q = 2$ on oma nimitys ja merkitys (vrt. Hilbertin avaruudet, luku 4).

2.21. Seuraus (Schwarzin epäyhtälö). *Jos $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$, niin*

$$(S) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \| x \|_2 \| y \|_2$$

kaikilla jonoilla $(x_k)_{k=1}^{\infty}, (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$. Äärellisten jonojen erikoistapauksessa saadaan

$$(S') \quad \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

kaikilla luvuilla $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Huomautus. Schwarzin epäyhtälö takaa, että avaruudessa ℓ^2 ns. bilineaarimuoto

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}, \quad x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$$

on hyvin määritelty. Tämä antaa ℓ^2 :een sisätulon rakenteen; tulemme näkemään Hilbertin avaruuksia koskevassa luvussa 4, että sisätuloavaruuksilla on monia poikkeuksellisen hyviä ominaisuuksia.

Hölderin epäyhtälön avulla voimme osoittaa, että ℓ^p -normit toteuttavat kolmioepäyhtälön; saatua arviota sanotaan (usein) *Minkowskin epäyhtälöksi*.

2.22. Lause (Minkowskin epäyhtälö). *Olkoon $1 < p < \infty$. Tällöin*

$$(M) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla jonoilla $(x_k)_{k=1}^{\infty}, (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$.

Huomautus. Kun $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^p$, niin summajono $(x_k + y_k) \in \ell^p$, joten ℓ^p on siis vektoriavaruus. Valitsemalla $x_k = 0, y_k = 0$ kun $k \geq n + 1$ saadaan äärellinen versio:

$$(M') \quad \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla luvuilla $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Voidaan olettaa, että $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p > 0$, koska epäyhtälö (M) on muuten ilmeinen.

Olkoon $1 < q < \infty$ sellainen, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (eli siis $q = \frac{p}{p-1}$). Hölderin epäyhtälön (H) ja skalaarikunnan \mathbb{K} kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{p-1} \underbrace{|x_k + y_k|}_{\leq |x_k| + |y_k|} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\stackrel{(H)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\| (x_k) \|_p + \| (y_k) \|_p \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

koska $q(p-1) = p$. Jakamalla saatu epäyhtälö puolittain positiivisella termillä $(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{q}}$ saadaan

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \| (x_k) \|_p + \| (y_k) \|_p.$$

Tämä on tarkalleen etsitty Minkowskin epäyhtälö (M), koska $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$.

Edellä sekä Hölderin epäyhtälön (H) käyttö että viimeinen jakovaihe edellyttävät luonnollisesti, että jono $(|x_k + y_k|^{p-1}) \in \ell^q$ ja summajono $(x_k + y_k) \in \ell^p$. Yllä todettiin jo, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{q(p-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p.$$

Näin haluttua tietoa varten riittää varsin alkeellinen arvio

$$(*) \quad |a + b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq (2 \max\{|a|, |b|\})^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p),$$

joka on voimassa kaikilla $a, b \in \mathbb{K}$. Nimittäin, kun sijoitetaan $a = x_k$, $b = y_k$ epäyhtälöön (*) ja summataan yli muuttujan k saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq 2^p \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right) < \infty,$$

koska $(x_k), (y_k) \in \ell^p$. Näin Lause 2.22 on saatu täydellisesti todistetuksi. \square

Huomautus. Erikoistapauksessa $p = 2$ äärellisiä jonoja koskeva epäyhtälö (M') on itse asiassa tuttu kolmioepäyhtälö kotiavaruuden \mathbb{K}^n euklidiselle normille

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

kun $n = 1, 2, \dots$ (vrt. Vektorianalyysi, Topo I).

Kootaan yhteen edelliset tulokset seuraavaksi tärkeäksi lauseeksi ℓ^p -avaruuksista (tapaukset $p = 1$ tai $p = \infty$ käsiteltiin aikaisemmin).

2.23. Lause. $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ on normiavaruus kun $1 < p < \infty$.

Todistus. Jos $x = (x_k) \in \ell^p$, $y = (y_k) \in \ell^p$, niin $x + y = (x_k + y_k)$ ja Minkowskin epäyhtälön (M) mukaan

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

(ja erityisesti $x + y \in \ell^p$, kuten edellä jo nähtiin). Siis (N1) pätee. Koska

$$\|ax\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |ax_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |a| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |a| \|x\|_p,$$

kun $x = (x_k) \in \ell^p, a \in \mathbb{K}$, niin myös homogeenisuusehto (N2) on voimassa. Edelleen

$$0 = \| (x_k) \|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \implies x_k = 0 \forall k \in \mathbb{N} \implies (x_k) = (0, 0, \dots) = \bar{0},$$

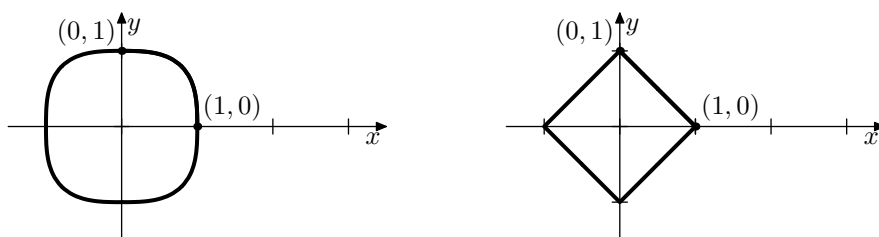
joten myös (N3) toteutuu. □

Huomautus. ℓ^p -avaruuksien välillä pätevät seuraavat sisältyvyudet (joukkoina): $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset \ell^\infty$, kun $1 < p < q < \infty$. Normeille pätevät vastaavasti arviot

$$\| x \|_\infty \leq \| x \|_q \leq \| x \|_p \leq \| x \|_1$$

jonoille $x = (x_k)$ (Harjoitukset 2).

Edellä olemme piirtäneet yksikköpallot normien $\| \cdot \|_2$ ja $\| \cdot \|_\infty$ suhteen. Entä yksikköpallo yleisten ℓ^p -normien suhteen? Alla kuva tapauksesta $p = 3$ ja $p = 1$ tason \mathbb{R}^2 tapauksessa; mieti millainen on yksikköpallo yleisellä p !



Lisätietoja. On olemassa luontevia ja käyttökelpoisia vektoriavaruuksia E , joissa on luonnollinen siirtainvariantti topologia τ , joka kuitenkin ei ole minkään E :n normin indusoima (ts. ei ole olemassa sellaista normia $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, että $\tau = \tau_{\| \cdot \|}$). Sellaisten avaruuksien teoriaa ei käsitellä kurssin aikana; esimerkeinä mainitaan kuitenkin:

(1) Varustetaan avaruus $C(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva} \}$ topologialla τ , jonka suhteen jono $f_n \rightarrow f$ kun $n \rightarrow \infty$, jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset \mathbb{R}^n$. Topologia τ saadaan kasvavasta *semi-normiperheestä* $(\| \cdot \|_m)$, missä

$$\| f \|_m = \sup_{x \in K_m} |f(x)|, \quad f \in C(\mathbb{R}^n),$$

kun $K_m = [-m, m]^n \subset \mathbb{R}^n$ sekä $m \in \mathbb{N}$, tai vaihtoehtoisesti siirtainvariantista metriikasta

$$d(f, g) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{\| f - g \|_m}{1 + \| f - g \|_m}, \quad f, g \in C(\mathbb{R}^n).$$

Vastaavaa topologiaa ei kuitenkaan voi kuvata pelkästään yhden normin $\|\cdot\|$ avulla (HT 2:??). Topologinen vektoriavaruus $(C(\mathbb{R}^n), \tau)$ on ns. *nukleaarinen Frechetin* avaruus.

Vastaava koskee myös *avoimella* välillä $(0, 1)$ jatkuvien funktioiden avaruutta

$$\{f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva} \},$$

sekä äärettömän monta kertaa derivoituvien funktioiden avaruutta

$$C^\infty(0, 1) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \mid f^{(j)} \text{ jatkuva jokaisella } j \in \mathbb{N}\}.$$

(Mieti miksi $\|f\|_\infty = \sup_{t \in (0,1)} |f(t)|$ ei kelpaa normiksi, kun f on jatkuva avoimella välillä $(0, 1)$!)

(2) Olkoon $0 < p < 1$. On luontevaa sanoa, että jono $x = (x_k) \in \ell^p$, jos

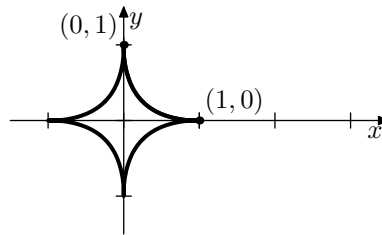
$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Tällöin $x \mapsto \|x\|_p$ toteuttaa normin ehdot (N2) ja (N3) sekä kolmioepäyhtälön heikommassa muodossa

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|x\|_p + \|y\|_p)$$

kaikilla $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^p$. Tässä vakio $2^{\frac{1}{p}-1} > 1$, kun $0 < p < 1$, eli $\|\cdot\|_p$ on ns. *kvasinormi* ℓ^p :ssä.

Alla kuva ”yksikköpallosta” $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p \leq 1\}$, kun $p = 1/2$.



Edellisen kuvan perusteella $\|\cdot\|_p$ ei voi olla normi tapauksessa $0 < p < 1$, koska vastaava ”yksikköpallo” ei ole konvekksi. Nimittäin, jokaisessa normiavaruudessa $(E, \|\cdot\|)$ yksikköpallo $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ on *konvekssi* joukko:

$$tx + (1-t)y \in B_E \text{ kaikilla } x, y \in B_E \text{ ja } 0 < t < 1.$$

Yksikköpallon konveksisuus seuraa tässä arviosta $\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq 1$.

(3) Kaikkien jonojen muodostama avaruus

$$s = \{ (x_n) : x_n \in \mathbb{K} \text{ jokaisella } n \in \mathbb{N} \}.$$

Avaruudessa s on summa ja skalaarilla kertominen määritelty kuten avaruudessa ℓ^∞ , ja voidaan osoittaa että

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}, \quad x = (x_k), y = (y_k) \in s,$$

on avaruuden siirtainvariantti metriikka (HT 2:??). Avaruus s on myös nukleaarinen Frechetin avaruus.

LINEAARISET OPERAATTORIT

Olkoon E ja F \mathbb{K} -kertoimisia vektoriavaruuksia. Kuvaus $T : E \rightarrow F$ on *lineaarinen* jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall x, y \in E \text{ ja } \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Sanomme usein että T on *lineaarinen operaattori* ja merkitsemme lyhyesti Tx merkinnän $T(x)$ sijaan.

Äärellisulotteisessa normiavaruudessa kaikki lineaariset kuvaukset ovat jatkuvia (todetaan myöhemmin), mutta äärettömän monen dimension avulla jatkuvuus on helppo rikkoa (annamme esimerkin hieman myöhemmin). Jos E, F ovat normiavaruuksia, on siis luonnollista kysyä:

Milloin lineaarinen kuvaus $T : E \rightarrow F$ on jatkuva ??

Vastausta varten tarvitsemme uuden käsitteen, rajoitetut operaattorit.

2.24. Määritelmä. Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $T : E \rightarrow F$ lineaarinen. Sanomme, että T on *rajoitettu*, jos on olemassa vakio $C < \infty$ jolle

$$\|Tx\|_F \leq C \|x\|_E \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Yleisesti sanotaan että normiavaruuden osajoukko $A \subset E$ on *rajoitettu*, jos $\sup\{\|x\| : x \in A\} \leq M < \infty$; yhtäpitävästi (Miksi?), A :n halkaisija on äärellinen. Helposti nähdään (vrt. Lemma 2.26 alla), että lineaarinen kuvaus T on rajoitettu jos ja vain jos se kuvaa E :n rajoitetut joukot F :n rajoitetuiksi joukoiksi.

2.25. Esimerkki. Olkoon $E = F = \ell^2$ ja $T : E \rightarrow F$ kuvaus $T : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (3x_{k+1})_{k=1}^\infty$ kun $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell^2$. Tällöin T on lineaarinen (Miksi?) ja rajoitettu:

$$\|Tx\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |3x_{k+1}|^2 \right)^{1/2} = 3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1}|^2 \right)^{1/2} \leq 3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} = 3\|x\|_2$$

Huomaamme, että vaadituksi vakioksi voidaan ottaa $C = 3$.

Operaattorin rajoittuneisuus voidaan testata seuraavan suureen avulla.

2.26. Lemma. *Lineaarinen operaattori $T : E \rightarrow F$ on rajoitettu jos ja vain jos*

$$(2.27) \quad \|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

Todistus. Jos T on rajoitettu, niin on olemassa sellainen vakio $C < \infty$, että $\|Tx\| \leq C\|x\|$ kaikilla $x \in E$. Tällöin selvästi $\|T\| \leq C$. Oletetaan kääntäen, että $\|T\| < \infty$. Koska $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ jokaisella $x \in E, x \neq \bar{0}$, nähdään lineaarisuudesta että

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|T\| \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Tästä saamme (jatkossa varsin keskeisen arvion!)

$$(2.28) \quad \|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$$

jokaisella $x \in E$, eli $T : E \rightarrow F$ on rajoitettu. □

Niinkuin merkintä jo vihjaa, saatua suuretta $\|T\|$ kutsutaan lineaarisen kuvauksen T *normiksi* (normin ominaisuudet todetaan myöhemmin luvussa 6). Se mittaa kuinka suureksi joukoksi T kuvaa yksikköpallon $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Olemme siis Lemmassa 2.26 tarkistaneet, että operaattori T on rajoitettu jos ja vain jos sen normi $\|T\| < \infty$. Jos tarve vaatii, merkitsemme avaruudet E ja F näkyviin, so. $\|T\|_{E \rightarrow F}$.

2.29. Esimerkkejä. (1) Olkoon $E = \ell^2$ ja $F = \ell^1$ sekä

$$Tx = T(x_k)_{k=1}^\infty := \left(\frac{1}{k}x_k\right)_{k=1}^\infty = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots).$$

Onko T rajoitettu operaattorina $\ell^2 \rightarrow \ell^1$? Heti havaitaan että

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k|.$$

Tässä arvio $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{1/2}$ *ei päde* kaikilla jonoilla $(x_k) \in \ell^1$, vaan käytämme sen sijaan Hölderin epäyhtälöä (H) kun $p = q = 2$,

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} = C\|x\|_2$$

missä $C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2} < \infty$. (Analyysi II; itse asiassa, $C = \sqrt{\pi^2/6}$). Näin ollen $T : \ell^2 \rightarrow \ell^1$ on rajoitettu ja saamme normille arvion $\|T\| \leq \sqrt{\pi^2/6}$.

(2) Rakennetaan seuraavaksi lineaarinen operaattori, joka *ei* ole rajoitettu. Voimme vaikkapa tarkastella kaikkien (reaalisten) polynomien muodostamaa avaruutta

$$\mathcal{P} = \left\{ p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

ja varustetaan se normilla $\|p\| = \max\{|a_k| : k = 0, \dots, n\}$, kun $\sum_{k=0}^n a_k t^k$.

Tällöin (derivaatta)kuvaus $T: \sum_{k=0}^n a_k t^k \mapsto \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1}$ on lineaarinen (Miksi?), mutta se ei ole rajoitettu: Jos $p_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$, silloin

$$\|p_n\| = 1, \quad \|Tp_n\| = \|np_{n-1}\| = n \Rightarrow \sup\{\|Tp\| : \|p\| = 1, p \in \mathcal{P}\} = \infty.$$

Palataan sitten alkuperäiseen kysymykseemme, milloin lineaarinen kuvaus on jatkuva? Käy ilmi, että lineaarinen operaattori on jatkuva täsmälleen silloin kun se on rajoitettu!

2.30. Lause. *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T: E \rightarrow F$ lineaarikuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- (i) T on rajoitettu operaattori
- (ii) T on jatkuva (koko E :ssä)
- (iii) T on jatkuva yhdessä pisteessä $x_0 \in E$.

Todistus. (i) \Rightarrow (ii): jos $x, y \in E$ ja $\varepsilon > 0$, niin

$$\|Tx - Ty\| \stackrel{\text{T lin.}}{=} \|T(x - y)\| \leq \|T\| \cdot \|x - y\| < \varepsilon \quad \text{kun} \quad \|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{\|T\|}.$$

(ii) \Rightarrow (iii): ilmeinen

(iii) \Rightarrow (i): Olkoon T jatkuva pisteessä x_0 . Jos $\varepsilon > 0$ annettu, voimme jatkuvuuden määritelmän perusteella valita sellaisen luvun $\delta > 0$ että aina

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

Jos nyt $x \in E$ ja $\|x\| \leq \delta$, saadaan

$$\|Tx\| \stackrel{\text{T lin.}}{=} \|T(x + x_0) - Tx_0\| < \varepsilon.$$

Toisaalta, jos $x \in B_E$ on mielivaltainen, niin $\|\delta x\| = \delta\|x\| \leq \delta$ ja siis

$$\delta\|Tx\| = \|T(\delta x)\| < \varepsilon, \quad \text{eli} \quad \|Tx\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \forall x \in B_E.$$

Siten $\|T\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$ ja olemme näin näyttäneet, että T on rajoitettu. □

Erityisesti, näemme, että Esimerkki 2.29.(2) antaa lineaarisen operaattorin $T: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, joka ei ole jatkuva.

Näillä tiedoin voimme myös aloittaa johdannossa esitetyn integraalioperaattorin tarkemman tarkastelun. Tulemme palaamaan teemaan useasti myöhemminkin.

2.31. Esimerkki. Olkoon $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva (ns. *ydinfunktio*). Kun $f \in C(0, 1) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\}$, muunnamme sen uudeksi funktioksi Tf , missä

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, s)f(s)ds, \quad x \in [0, 1].$$

Väite: näin saadaan jatkuva lineaarinen operaattori $T : C(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$.

Meidän on siis osoitettava kolme asiaa:

1. $f \mapsto Tf$ on lineaarinen,
2. Tf on jatkuva funktio välillä $[0, 1]$ aina kun f on jatkuva välillä $[0, 1]$,
3. operaattorina T on rajoitettu $C(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$.

Jätetään 1. väite lukijan tehtäväksi (tämä palautuu integraalin lineaarisuuteen kurssista Analyysi II). Väite 2. kertoo että todellakin $T(C(0, 1)) \subset C(0, 1)$. Sitä varten arvioidaan

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tf)(y)| &= \left| \int_0^1 K(x, s)f(s)ds - \int_0^1 K(y, s)f(s)ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |K(x, s) - K(y, s)| |f(s)|ds. \end{aligned}$$

Funktion Tf jatkuvuus siis palautuu ydinfunktion K ominaisuuksiin. Heti kuitenkin huomataan, että pelkkä pisteittäinen K :n jatkuvuus ei riitä, vaan arvio pitää tehdä tasaisesti muuttujan $s \in [0, 1]$ suhteen. Tarvitsemme siis hieman tietoja kurssilta Topologia I: Oletamme tunnetuksi, että kompaktissa joukossa määritelty jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva².

Sovellamme tätä tietoa ydinfunktioon $(x, s) \mapsto K(x, s)$. Koska $[0, 1] \times [0, 1]$ on kompakti (eli suljettu ja rajoitettu joukko tasossa \mathbb{R}^2) tason euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ suhteen, jokaisella $\varepsilon > 0$ löydämme sellaisen $\delta > 0$ että jos

$$|x - y| = \|(x, s) - (y, s)\|_2 < \delta,$$

niin silloin

$$(2.32) \quad |K(x, s) - K(y, s)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } s \in [0, 1].$$

²Funktio $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ on *tasaisesti jatkuva* joukossa A jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ että aina $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Olennaista tässä siis on, että vaadittu δ riippuu vain etäisyydestä $\|x - y\|$, eikä siitä missä pisteet x, y sijaitsevat.

Erityisesti, luvun $\delta > 0$ suuruus ei riippunut pisteestä s . Saamme näin

$$(2.33) \quad |(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq \varepsilon \int_0^1 |f(s)| ds \leq \varepsilon \|f\|_\infty, \quad \text{kun } |x - y| < \delta.$$

Koska ε oli mielivaltainen, olemme osoittaneet Tf :n jatkuvuuden (väite 2).

Myös väite 3. käyttää tuttua topologista tulosta (Topologia I, Vektorianalyysi): Koska K on jatkuva (ja reaaliarvoinen) kompaktissa joukossa $[0, 1] \times [0, 1]$, se saa siinä suurimman ja pienimmän arvonsa, ja erityisesti K on rajoitettu. Siis eräällä vakiolla $M < \infty$ pätee

$$|K(x, s)| \leq M < \infty \quad \text{kaikilla } x, s \in [0, 1].$$

Näin saamme kaikilla $f \in C(0, 1)$ arvion

$$|(Tf)(x)| \leq \int_0^1 |K(x, s)| |f(s)| ds \leq M \|f\|_\infty,$$

mikä siis antaa $\|Tf\|_\infty \leq M \|f\|_\infty$. Näin ollen T on rajoitettu operaattori; voimme itse asiassa valita

$$M = \|K\|_\infty = \sup_{(x,s) \in [0,1] \times [0,1]} |K(x, s)|,$$

jolloin $\|T\| \leq \|K\|_\infty$. Olemme siten todistaneet viimeisenkin väitteen 3.

(*Kommentti:* Esimerkin tulos pätee myös kompleksiarvoisille ydinfunktioille $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Tässä tapauksessa $C(0, 1)$ koostuu jatkuvista funktioista $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, ja kompleksiarvoinen integraali on

$$\int_0^1 f(s) ds = \int_0^1 f_1(s) ds + i \int_0^1 f_2(s) ds,$$

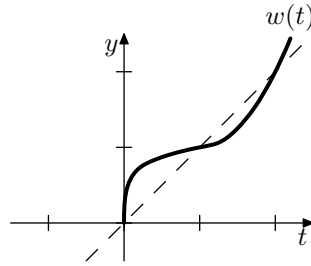
kun $f = f_1 + if_2 \in C(0, 1)$, missä $f_1(s) = \operatorname{Re}f(s)$ ja $f_2(s) = \operatorname{Im}f(s)$, $s \in [0, 1]$. Argumentti on kompleksisessä tapauksessa hyvin samanlainen ylläolevan kanssa, ja jätämme yksityiskohdat lukijan pohdittaviksi.) \square

2.34. *Huomautus.* (Ei luennoilla vuonna 2010) Yllä esitetty integraalioperaattorin jatkuvuuden todistus antaa hieman enemmänkin kuin mitä Esimerkki 2.31 tarvitsi: Havaitaan että funktion Tf jatkuvuus riippuu olennaisesti vain ytimeistä K eikä niinkään funktiosta f .

Koska tällä havainnolla on käyttöä myöhemmin, formalisoidaan sitä hieman, käyttäen jatkuvuusmodulin käsitettä: Olkoon meillä funktio $w : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jolle

$$t \mapsto w(t) \text{ on jatkuva, aidosti kasvava ja } w(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Sanomme silloin että w on *jatkuvuusmoduli*.



Nimittäin, jos A on normiavaruuden E osajoukko ja funktiolle $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ pätee

$$(2.35) \quad |g(x) - g(y)| \leq w(\|x - y\|) \quad \text{kaikilla } x, y \in A,$$

niin w kertoo ”kuinka” jatkuva g on. [Tyypillinen esim: $w(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.]

Jos g :llä on jatkuvuusmoduli w joukossa A , eli (2.35) pätee, se on selvästikin tasaisesti jatkuva (Miksi?). Mutta pätee myös kääntäen, että jokaisella tasaisesti jatkuvalla funktiolla on jatkuvuusmoduli. Voimme nimittäin asettaa

$$w_0(t) = \sup\{|g(x) - g(y)| : x, y \in A, \|x - y\| \leq t\}.$$

Tasaisen jatkuvuuden nojalla w_0 on jatkuva ja $w_0(t) \rightarrow 0$ kun $t \rightarrow 0$. Aidosti kasvava siitä saadaan määrittelemällä $w(t) = w_0(t) + t$. Tälle (2.35) selvästi pätee, ja siten g :llä on jatkuvuusmoduli w .

Jos palaamme Esimerkkiin 2.31, ytimellä K on ylläolevan nojalla jatkuvuusmoduli w_K . Lisäksi, arviot (2.32), (2.33) antavat

$$(2.36) \quad |(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq w_K(|x - y|) \|f\|_\infty \leq w_K(|x - y|)$$

mikäli $\|f\|_\infty \leq 1$, eli $f \in B_E$, $E = C(0, 1)$. Toisin sanoen, oli f :n jatkuvuus miten heikkoa tahansa, Tf :n jatkuvuus on aina vähintään luokkaa w_K !

Harjoitustehtäviä

2:1 Olkoon $f_n(t) = t^n$ kun $t \in [0, 1]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko jono (f_n) jatkuvien funktioiden avaruudessa $(C(0, 1), \|\cdot\|_\infty)$?

2:2 Olkoon $g_n(t) = n(e^{t/n} - 1)$ ja $g(t) = t$ kun $t \in [0, 1]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Näytä, että $\|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$. [Vihje: tutki esimerkiksi erotusfunktion ääriarvoja.]

2:3 Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus skalaarikuntana \mathbf{K} . Näytä, että kuvaukset $(x, y) \mapsto x + y : E \times E \rightarrow E$ ja $(\lambda, x) \mapsto \lambda x : \mathbf{K} \times E \rightarrow E$ ovat jatkuvia. [Muistutus: Riittää esimerkiksi näyttää että $x_n + y_n \rightarrow x + y$ kun $n \rightarrow \infty$ aina kun $x_n \rightarrow x$ ja $y_n \rightarrow y$ E :ssä, ja samoin toisessa tapauksessa.]

2:4 Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ normeja vektoriavaruudessa E . Näytä, että $\|x\| = \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$, $x \in E$, määrittelee normin avaruudessa E . Etsi lisäksi esimerkki sellaisista normeista $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ tasossa \mathbf{R}^2 , että $\|x\|_0 = \min\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$ ei ole normi tasossa.

2:5 Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus ja $F \subset E$ aito vektorialiavaruus (siis $F \neq E$). Voiko F olla avoin joukko avaruudessa E ? [*Vihje*: jos $x \in E \setminus F$, mieti mitä tapahtuu puolisuoralla $\{\lambda x : \lambda > 0\}$.]

2:6. Tutki ovatko seuraavat joukot avoimia (avaruuksien vastaavien sup-normien suhteen):

$$A = \{f \in C(0, 1) : f(t) > 0 \text{ kaikilla } t \in [0, 1]\},$$

$$B = \{(x_k)_{k=1}^\infty \in \ell^\infty : x_k > 0 \text{ kaikilla } k \in \mathbf{N}\}.$$

2:7. Olkoon $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^1$ (ykkönen n :nellä paikalla) kun $n = 1, 2, \dots$. Asetetaan $A = \{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ ja $B = \{-e_n + \frac{1}{n}e_1 : n \in \mathbf{N}\}$. Perustele miksi A ja B ovat avaruuden ℓ^1 suljettuja ja rajoitettuja joukkoja, mutta summajoukko $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ei ole suljettu.

2:8. Näytä, että $c_0 = \{(x_n) \in \ell^\infty : \lim_n x_n = 0\}$ on avaruuden ℓ^∞ suljettu vektorialiavaruus sup-normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen. Osoita lisäksi että c_0 on separoituva normiavaruus. [*Vihje*: Tarkista, että finiittisten jonojen joukko $c_{00} = \{(x_n) : x_n \neq 0 \text{ äärellisen monella } n\}$ on separoituva ja tiheä c_0 :ssa.]

2:9. Osoita, että rajoitettujen jonojen avaruus $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ei ole separoituva. [*Vihje*: Tutki esimerkiksi karakterististen funktioiden $\{\chi_A : A \subset \mathbf{N}\} \subset \ell^\infty$ muodostamaa jonoperhettä, tai diagonalisoi. Edellä $\chi_A(n) = 1$ jos $n \in A$ ja $\chi_A(n) = 0$ muulloin. Voit vapaasti käyttää tietoa, että potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbf{N}) = \{A : A \subset \mathbf{N}\}$ on ylinumeroituva.]

2:10. Olkoon $1 < p < \infty$. Etsi sellainen jono $(x^{(n)}) \subset \ell^p$, että $\|x^{(n)}\|_p \leq 1$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$ ja jonolla $(x^{(n)})$ ei ole normissa $\|\cdot\|_p$ suppenevia osajonoja. Tässä $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k=1}^\infty \in \ell^p$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. [*Huom.*: Tämän esimerkin perusteella suljettu yksikköpallo B_{ℓ^p} siis ei ole kompakti joukko avaruudessa ℓ^p .]

2:11. Olkoon $1 \leq p < q \leq \infty$. Näytä, että $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ kun $x = (x_n) \in \ell^p$. Päättele, että $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$ kun $1 \leq p < q \leq \infty$. [*Vihje*. Tutki aluksi sellaista jonoa $x = (x_n) \in \ell^p$ jolle $\|x\|_p = 1$.]

2:12. Määritellään

$$Tf(x) = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{t}} f(t) dt, \quad x \in [0, 1],$$

kaikilla $f \in C(0, 1)$. Näytä, että T on (hyvin määritelty) rajoitettu lineaarinen kuvaus $C(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$. Anna jokin yläarvio T :n normille $\|T\|$.

2:13. Olkoon E normiavaruus ja $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineaarinen kuvaus. Kuvauksen T ydin on

$$\text{Ker}(T) = \{x \in E : Tx = 0\}.$$

Osoita: T on jatkuva jos ja vain jos $\text{Ker}(T)$ on E :n suljettu vektorialiavaruus. [Vihje: suuntaan "⇐" oletta, ettei T ole jatkuva origossa ja näytä, että $\text{Ker}(T)$ ei ole suljettu. Lauseen 2.30 nojalla on jokaisella $n \in \mathbb{N}$ olemassa sellaiset vektorit $x_n \in E$, että $\|x_n\| = 1$ ja $Tx_n \geq n$. Olkoon $y_n = \frac{x_n}{Tx_n}$ kun $n \in \mathbb{N}$. Koska $T \neq \bar{0}$ on olemassa $x \in E$ jolle $Tx = 1$. Kirjoita $x = x - y_n + y_n$, sekä toteuta että $x - y_n \in \text{Ker}(T)$ kaikilla n ja lisäksi $y_n \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$.]

3. TÄYDELLISYYS JA BANACHIN AVARUUS

Reaalilukujen joukko \mathbb{R} (varustettuna normilla $|x - y|$) eroaa ratkaisevasti rationaalilukujen joukosta \mathbb{Q} seuraavan ominaisuutensa perusteella: reaalilukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee \mathbb{R} :ssä jos ja vain jos (x_n) on Cauchyn jono (ts. (x_n) toteuttaa Cauchyn suppenemisehdon). Tätä reaalilukujen joukon \mathbb{R} ominaisuutta sanotaan täydellisyudeksi. Toisena esimerkkinä mainitaan avaruus

$$E = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on Riemann-integroituva}\}$$

varustettuna seminormilla

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad f \in E.$$

Avaruus $(E, \|\cdot\|_1)$ ei ole täydellinen (todistus sivuutetaan); tämä puute oli eräs keskeisistä syistä Lebesgue integraalin käyttöönottoon ja kehittämiseen.

Yleisemmällä tasolla, (esim. differentiaali)yhtälöitä ratkaistaan tyypillisesti hakemalla approksimatiivisia ratkaisuja, ja lähes säännöllisesti funktioavaruuksilta vaaditaan täydellisyyttä, jotta approksimatiivisille ratkaisuille löydetään jokin rajafunktio.

3.1. Määritelmä. Normiavaruuden $(E, \|\cdot\|)$ jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on *Cauchyn jono*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen luku $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\|x_k - x_j\| < \varepsilon$$

aina kun $k \geq m_\varepsilon$ ja $j \geq m_\varepsilon$.

Huomautus. Kun tarkastellaan jonon $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ määäämiä loppuosan joukkoja $A_m = \{x_n : n \geq m\}$, missä $m = 1, 2, \dots$, niin huomataan näiden halkaisijoitien avulla, että:

$$(x_n) \text{ on Cauchyn jono} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \text{diam}(A_m) = 0.$$

Edellä joukon $A \subset E$ halkaisija on $\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|$.

Seuraavat kaksi lausetta kertovat Cauchy jonojen perusominaisuudet (erikoistapauksessa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ nämä ominaisuudet esiintyvät jo Analyysi I:ssä).

3.2. Lause. Normiavaruuden E suppeneva jono (x_n) on aina Cauchyn jono.

Todistus. Olkoon $\lim_n x_n = y$ eli $\lim_n \|x_n - y\| = 0$. Jos $\varepsilon > 0$, on olemassa sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\|x_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } n \geq m_\varepsilon.$$

Siis kun $j, k \geq m_\varepsilon$, niin $\|x_k - x_j\| \stackrel{\Delta - ey}{\leq} \|x_k - y\| + \|y - x_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. \square

Toisaalta,

3.3. Lause. Normiavaruuden E Cauchy jono (x_n) on rajoitettu, eli on olemassa $M < \infty$ jolle $\|x_n\| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Olkoon $(x_n) \subset E$ Cauchy jono ja $A_m = \{x_n : n \geq m\}$. Koska (x_n) on Cauchy jono, niin on siis olemassa sellainen $m_0 \in \mathbb{N}$, että $\text{diam}(A_{m_0}) < 1$. Jos $y \in A_{m_0}$, niin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$\|y\| \stackrel{\Delta-ey}{\leq} \|y - x_{m_0}\| + \|x_{m_0}\| < 1 + \|x_{m_0}\|.$$

Siispä täyden jonon (x_n) vektoreille saamme arvion

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| \leq \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_{m_0-1}\|, 1 + \|x_{m_0}\|\} < \infty.$$

□

Alamme sitten tarkastelemaan täydellisiä normiavaruuksia.

3.4. Määritelmä. Normiavaruus $(E, \|\cdot\|)$ on *täydellinen*, jos avaruuden E jokainen Cauchyn jono (x_n) suppenee avaruudessa E (siis on olemassa sellainen $y \in E$, että $\lim_n x_n = y$).

Täydelliset normiavaruudet ovat funktionaalianalyysin keskeinen tutkimuskohde ja työkalu, joten näille on otettu käyttöön oma nimi (puolalaisen Stefan Banach'in (1892-1945) mukaan, joka merkittävällä tavalla kehitti alaa).

3.5. Määritelmä. Täydellistä normiavaruutta $(E, \|\cdot\|)$ sanotaan *Banachin avaruudeksi* (usein sanomme lyhyesti: E on Banachin avaruus).

Selvitetään seuraavaksi mitkä edellisessä luvussa löydetyistä avaruuksista ovat täydellisiä, ja erityisesti, kuinka käytännössä näytetään että annettu normiavaruus on täydellinen. Olkoon siis ensin $A \neq \emptyset$ joukko ja

$$B(A, \mathbb{K}) = B(A) := \{x : A \rightarrow \mathbb{K} \mid x \text{ rajoitettu kuvaus}\},$$

varustettuna normilla

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in A} |x(t)|, \quad \text{kun } x \in B(A, \mathbb{K}).$$

3.6. Lause. $(B(A, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Todistus. Todistus perustuu skalaarikunnan \mathbb{K} täydellisyyteen. Nimittäin, olkoon (x_n) Cauchyn jono avaruudessa $B(A, \mathbb{K})$, $\varepsilon > 0$ ja $t \in A$ mielivaltainen. Koska on olemassa sellainen indeksi m_ε , että

$$(3.7) \quad |x_k(t) - x_j(t)| \leq \|x_k - x_j\|_\infty < \varepsilon$$

kun indeksit $k, j \geq m_\varepsilon$, on skalaarijono $(x_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyn jono skalaarikunnassa \mathbb{K} . Tällöin on siis olemassa raja-arvo $\lim_n x_n(t) \in \mathbb{K}$, sillä metriset avaruudet $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ovat täydellisiä. (Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ palautetaan mieleen alla.) Pitämällä $t \in A$ muuttujana saadaan (yksikäsitteisestä) raja-arvosta kuvaus $y : A \rightarrow \mathbb{K}$,

$$y(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t), \quad t \in A.$$

Lauseen väite seuraa osoittamalla seuraavat apuväitteet:

- (i) kuvaus $y \in B(A, \mathbb{K})$, eli y on rajoitettu kuvaus $A \rightarrow \mathbb{K}$,
- (ii) $\|x_n - y\|_\infty \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, eli $x_n \rightarrow y$ avaruudessa $B(A, \mathbb{K})$.

Tätä varten, olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, ja käytetään arviota (3.7), joka pätee *tasaisesti* jokaisella $t \in A$. Pidetään siinä $k \geq m_\varepsilon$ sekä $t \in A$ kiinteinä, ja annetaan $j \rightarrow \infty$. Silloin

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |x_k(t) - x_j(t)| = |x_k(t) - y(t)|,$$

koska yo. tarkastelee vain skalaarilukuja $x_j(t)$ ja skalaarien normi $|\cdot|$ on jatkuva. Epäyhtälön (3.7) säilyminen rajalla takaa, että

$$(3.8) \quad |x_k(t) - y(t)| \leq \varepsilon \quad \text{kun } t \in A \text{ ja } k \geq m_\varepsilon.$$

Tästä saadaan ensinnäkin että

$$|y(t)| \leq |y(t) - x_k(t)| + |x_k(t)| \leq \varepsilon + \|x_k\|_\infty \quad \text{kun } t \in A,$$

eli että $y \in B(A, \mathbb{K})$. Toiseksi (3.8) pätee tasaisesti, so. samalla yläarviolla ε jokaisessa pisteessä $t \in A$, joten saadaan

$$\|x_k - y\|_\infty = \sup_{t \in A} |x_k(t) - y(t)| \leq \varepsilon \quad \text{kaikilla } k \geq m_\varepsilon.$$

Olemme näin näyttäneet, että $\lim_k x_k = y$ avaruudessa $B(A, \mathbb{K})$, eli suppeneminen tapahtuu ko. avaruuden *normin* suhteen.

Ylläolevat argumentit yhdistäen nähdään että $(B(A), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

(*Muistutus:* $(\mathbb{C}, |\cdot|)$:n täydellisyys palautuu \mathbb{R} :n vastaavaan ominaisuuteen. Edellä $|z| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$ kun $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Olkoon $(z_n) \subset \mathbb{C}$ Cauchyn jono, missä $z_n = a_n + ib_n$ kun $n \in \mathbb{N}$. Koska $|a_n - a_m| \leq |z_n - z_m|$ kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$, niin $(a_n) \subset \mathbb{R}$ on Cauchyn jono, joten $\lim_n a_n = a$ on olemassa. Samoin imaginaariosat (b_n) muodostaa \mathbb{R} :n Cauchyn jono, joten $b_n \rightarrow b$ kun $n \rightarrow \infty$. Tällöin $\lim_n z_n = a + ib$, koska

$$|z_n - (a + ib)| = \sqrt{|a_n - a|^2 + |b_n - b|^2} \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.)$$

□

Erikoistapauksina $A = \{1, \dots, n\}$ ja $A = \mathbb{N}$ saadaan tästä

3.9. Seuraus. (1) *Vektoriavaruus \mathbb{K}^n varustettuna metriikalla*

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

on Banachin avaruus.

(2) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Annetaan myös konkreettinen esimerkki *epätäydellisestä* normiavaruudesta.

3.10. Esimerkki. $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ ei ole täydellinen normiavaruus, kun

$$c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : x_n \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } n \in \mathbb{N}\},$$

ja

$$\|(x_k)\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad (x_k) \in c_{00}.$$

Ratkaisu: $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ on normiavaruus, koska $c_{00} \subset c_0$ on vektoriavaruus. Olkoon $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, kun $n \in \mathbb{N}$. Selvästi $x^{(n)} \in c_{00}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta kaikilla $n, p \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} \|x^{(n+p)} - x^{(n)}\|_\infty &= \left\| \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ kpl}}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+p}, 0, 0, \dots \right\|_\infty \\ &= \sup_{n+1 \leq j \leq n+p} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

kaikilla $p \in \mathbb{N}$, kun $n \rightarrow \infty$. Siispä $(x^{(n)})$ Cauchyn jono avaruudessa $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$.

Väite epätäydellisyydestä seuraa, kun osoitetaan, ettei ole olemassa jonoa $y = (y_k) \in c_{00}$, jolle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - y\|_\infty = 0.$$

Tehdään vastaoletus: oletetaan, että todella löytyisi sellainen $y = (y_k) \in c_{00}$, että $x^{(n)} \rightarrow y$ sup-normissa. Jonon $(x^{(n)})$ alkioiden k :nnet koordinaatit $x_k^{(n)}$ ovat muotoa

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

ja kaikilla indekseillä $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$|x_k^{(n)} - y_k| \leq \|x^{(n)} - y\|_\infty \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Siksi

$$y_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{k},$$

kun $k = 1, 2, \dots$. Toisaalta, $y = (\frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}} \notin c_{00}$, mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. Siis $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ on epätäydellinen. \square

3.11. *Huomautus.* (1) Reaalikertoimisten polynomien muodostama normiavaruus

$$\mathcal{P} = \{ p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ polynomi} \}$$

varustettuna sup-normilla

$$\|p\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |p(t)|$$

ei ole täydellinen. (Muista Analyysi II:sta, että $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ kaikilla $t \in [0, 1]$, ja tarkastele polynomeja $p_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$, kun $n \in \mathbb{N}$). Samoin, jos \mathcal{P} varustetaan luvun 2 Esimerkissä 2.13.(2) annetuilla normeilla $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$, niin vastaavasti osoittautuu että \mathcal{P} :stä ei tule täydellistä.

(2) Lauseessa 3.24 näytämme, että $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ on Banachin avaruus kaikilla $1 \leq p < \infty$. Sen sijaan, Esimerkin 3.10 ideaa muokkaamalla voidaan nähdä, että jos $1 \leq p < q < \infty$, niin normiavaruudet $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ ja $(\ell^p, \|\cdot\|_\infty)$ eivät ole täydellisiä. (Muista, että $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$ kaikilla $1 \leq p < q < \infty$, vrt. HT 2:10).

Seuraavan tuloksen avulla saadaan lisää esimerkkejä Banachin avaruuksista.

3.12. **Lause.** *Olkoon E Banachin avaruus ja $M \subset E$ suljettu aliavaruus. Tällöin M on täydellinen, eli Banachin avaruus, avaruuden E indusoimassa normissa.*

Muistutus: $M \subset E$ on suljettu jos ja vain jos sulkeuma $\overline{M} = M$, missä $x \in \overline{M}$ jos $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$.

Todistus. Jos $(x_n) \subset M$ on Cauchyn jono avaruudessa M , niin (x_n) on myös avaruuden E Cauchyn jono. Koska E täydellinen, niin on olemassa sellainen raja-alkio $y \in E$, että $\lim_n x_n = y$. Koska M on suljettu ja $x_n \in M$ kaikilla n , niin raja $y \in \overline{M} = M$, joten M on täydellinen. \square

Edellinen tulos pätee myös käänteiseen suuntaan:

3.13. **Lause.** *Normiavaruuden E täydellinen aliavaruus M on suljettu avaruudessa E .*

Todistus. Olkoon $z \in \overline{M}$ mielivaltainen. Koska $M \cap B(z, 1/n) \neq \emptyset$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$, niin voidaan löytää sellainen jono $(x_n) \subset M$, että $\lim_n x_n = z$. Tällöin $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono avaruudessa E Lauseen 3.2 nojalla ja siten myös avaruudessa M , joten avaruuden M täydellisyyden nojalla $\lim_n x_n = y \in M$ on olemassa. Raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla on oltava $z = y \in M$, joten siis $\overline{M} = M$ ja M on suljettu avaruudessa E . \square

3.14. Seuraus. Olkoon M Banachin avaruuden E vektorialiavaruus. Tällöin M on täydellinen (eli Banachin avaruus E :n indusoimassa normissa) $\Leftrightarrow M$ on suljettu.

Todistus. Seuraa välittömästi Lauseista 3.12 ja 3.13. \square

Käytämme seuraavaksi näitä tietoja tutkimaan jatkuvien kuvausten avaruuksia.

3.15. Esimerkki. Olkoon X metrinen avaruus, ja

$$C(X) = C(X, \mathbb{K}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ jatkuva avaruudessa } X\}$$

Jos $f, g \in C(X)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin pisteittäinen summafunktio $f + g \in C(X)$ ja $\lambda f \in C(X)$, jolloin avaruudesta $C(X)$ tulee vektoriavaruus. Merkitään

$$BC(X) = BC(X, \mathbb{K}) := B(X, \mathbb{K}) \cap C(X),$$

eli jatkuvien ja rajoitettujen kuvausten $X \rightarrow \mathbb{K}$ avaruus. Siis $BC(X)$ on avaruuden $B(X) := B(X, \mathbb{K})$ vektorialiavaruus.

Kysymys. Onko $BC(X) \subset B(X)$ suljettu (normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen)?

Olkoon $t \in X$ kiinteä, ja asetetaan

$$BC_t(X) = \{f \in B(X) : f \text{ on jatkuva pisteessä } t\}.$$

Huomautus. (Topo I) $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ on jatkuva pisteessä $t \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen pisteen t avoin ympäristö V , $t \in V \subset X$, että

$$|f(u) - f(t)| < \varepsilon \text{ kaikilla } u \in V.$$

3.16. Lemma. $BC_t(X)$ on avaruuden $B(X)$ suljettu vektorialiavaruus kaikilla $t \in X$.

Todistus. Olkoon $g \in B(X)$ sellainen funktio $X \rightarrow \mathbb{K}$, että g sisältyy vektoriavaruuden $BC_t(X)$ sulkeumaan sup-normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Tällöin on olemassa sellainen $f \in BC_t(X)$, että $\|g - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Koska funktio f on jatkuva pisteessä t , niin löytyy sellainen avoin ympäristö $t \in V \subset X$, että

$$|f(t) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ kaikilla } u \in V.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} |g(t) - g(u)| &\leq \underbrace{|g(t) - f(t)|}_{\leq \|g-f\|_\infty} + |f(t) - f(u)| + \underbrace{|f(u) - g(u)|}_{\leq \|g-f\|_\infty} \\ &\leq 2 \underbrace{\|g - f\|_\infty}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

kaikilla $u \in V$. Siis g on jatkuva pisteessä t , joten $g \in BC_t(X)$ ja siis $BC_t(X)$ on suljettu. \square

3.17. Lause. *Olkoon X metrinen avaruus. Tällöin $(BC(X), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Koska f on jatkuva avaruudessa X jos ja vain jos f on jatkuva kaikissa pisteissä $t \in X$, niin

$$BC(X) = \bigcap_{t \in X} BC_t(X),$$

missä $BC_t(X)$ on suljettu kaikilla $t \in X$ Lemman 3.16 nojalla. Siis $BC(X)$ on suljettu (vektori)aliavaruus avaruudessa $B(X)$. Nyt väite seuraa Lauseista 3.6 ja 3.12. \square

3.18. Seuraus. *Jos X on kompakti metrinen avaruus, niin $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus. Erityisesti, $(C(0, 1), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.*

Muistutus: Metrinen avaruus X on *kompakti* jos jokaisella jonolla $(x_n) \subset X$ on suppeneva osajono $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$, eli siis $x_{n_j} \rightarrow y$ kun $j \rightarrow \infty$ sopivalla $y \in X$. Esimerkiksi, osajoukko $B \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti jos ja vain jos B on suljettu ja rajoitettu (ns. Heine-Borelin lause, [Väisälä: Topologia I], Lause 13.14).

Todistus. Käytetään Topo I:n tulosta jonka mukaan kompaktissa metrisessä avaruudessa X jokainen jatkuva kuvaus $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ on rajoitettu, eli $C(X) = BC(X)$. \square

Huomautus. (1) Edelläolevan merkinnän mukaan siis $C(0, 1) \equiv C([0, 1])$. Sen sijaan vektoriavaruudessa $C((0, 1)) = \{f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva välillä } (0, 1)\}$ ei ole edes ”järkevää” normia (vrt. Harjoitukset 2)!

(2) Lause 3.17 ja Seuraus 3.18 pätevät myös samoilla todistuksilla kun yleisemmin X on *topologinen* avaruus. Tässä tapauksessa kompaktisuus määritellään avoimien peitteiden avulla (katso [Väisälä: Topologia I], Lause 13.39).

Esimerkin 2.10 kohdassa (2) esiteltiin avaruuden ℓ^∞ aliavaruudet c ja c_0 .

$$c := \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K} \forall n \in \mathbb{N}, \lim_n x_n \text{ on olemassa}\},$$

$$c_0 := \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K} \forall n \in \mathbb{N}, \lim_n x_n = 0\}.$$

3.19. Lause. *c ja c_0 ovat Banachin avaruuksia (sup-normin suhteen).*

Todistus. (1) $c_0 \subset \ell^\infty$ on *suljettu* vektorialiavaruus (Harjoitukset 1)

(2) $c \subset \ell^\infty$ on suljettu:

Olkoon $x = (x_k) \in \ell^\infty$ sellainen jono, että $x \in \bar{c}$. Kun $\varepsilon > 0$, niin löytyy sellainen jono $y = (y_k) \in c$, että

$$\|x - y\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Koska (y_k) on suppeneva jono, niin erityisesti (y_k) on skalaarikunnan \mathbb{K} Cauchyn jono. Siis on olemassa sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$|y_j - y_k| < \frac{\varepsilon}{3}$$

kaikilla $j, k \geq m_\varepsilon$. Tällöin

$$\begin{aligned} |x_j - x_k| &\stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} |x_j - y_j| + |y_j - y_k| + |y_k - x_k| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

kaikilla $j, k \geq m_\varepsilon$. Koska $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, niin $x = (x_k)$ on myös skalaarikunnan \mathbb{K} Cauchyn jono. Siispä (x_k) suppenee, joten $x \in c$. Siis $c = \bar{c}$ on suljettu, joten Lauseen 3.12 nojalla c on Banachin avaruus. \square

Huomautus. Olkoon $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ja varustetaan se topologialla τ , jonka kantana ovat joukot

$$U = \{n\} \quad \text{ja} \quad V = \{\infty\} \cup \{k \in \mathbb{N} : k \geq m\}, \quad \text{missä } n, m \in \mathbb{N}.$$

Saatu avaruus $(\bar{\mathbb{N}}, \tau)$ on \mathbb{N} :n yhden pisteen kompaktifointi. Tällöin itse asiassa $c = C(\bar{\mathbb{N}})$. Siten Lause 3.19 seuraa myös Seurauksesta 3.18.

VEKTORIVARVOISISTA SARJOISTA

Olkoon E normiavaruus ja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jono avaruudessa E . Mietimme seuraavaksi vastaavan vektorisarjan $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ summautumista. Toisin sanoen, pätevätkö tutut sarjateorian perusteet myös äärettömän dimension tapauksessa?

Sarjaa merkitään tavallisesti symbolilla $\sum_k x_k$ tai $\sum x_k$. Sen osasummille käytetään tuttuja merkintöjä,

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^n x_j \quad \text{kun } n \in \mathbb{N},$$

jolloin siis $s_n \in E$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Edelleen, alkio $x_k \in E$ on sarjan k :s *termi*.

3.20. Määritelmä. Olkoon $\sum x_k$ normiavaruuden E alkioden muodostama sarja. Mikäli osasummien jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti vektoria $s \in E$, eli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - s\| = 0,$$

sanotaan että sarja $\sum_k x_k$ *suppenee* E :ssa ja sen *summa* on s ; merkitään tällöin

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Sanotaan, että E :n sarja $\sum_k x_k$ on *absoluuttisesti* suppeneva (joskus myös: *normisuppeneva*), jos positiiviterminen sarja $\sum_k \|x_k\|$ suppenee (\mathbb{R} :ssä).

3.21. Esimerkki. Olkoon $e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, \dots) \in \ell^2$, kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ avaruudessa ℓ^2 ? Entä suppeneeko $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ absoluuttisesti ℓ^2 :ssa?

Ratkaisu: Olkoon $x = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Nyt $x \in \ell^2$ koska (Analyysi II)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Tällöin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ suppenee ℓ^2 :ssa ja sen summa $\sum \frac{e_n}{n} = x$. Nimittäin, sarjan m :s osasumma s_m on

$$s_m = \sum_{n=1}^m \frac{e_n}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots),$$

ja siis

$$\|x - s_m\|_2 = \left\| \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{m \text{ kpl}}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \dots \right\|_2 = \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

kun $m \rightarrow \infty$; kyseessä on suppenevan sarjan jäännöstermi. Kuitenkaan sarja $\sum \frac{e_n}{n}$ *ei ole* absoluuttisesti suppeneva avaruudessa ℓ^2 , sillä Analyysi II:n nojalla (harmoninen sarja)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{e_n}{n} \right\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \|e_n\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

□

Täydellisyyden ja absoluuttisesti suppenevien sarjojen välillä on tärkeä yhteys. Ennen tätä tulosta tarvitaan seuraava hyödyllinen *riittävä* ehto Cauchyn jonon suppenemiselle.

3.22. Lause. *Jos normiavaruuden E Cauchyn jonolla (x_n) on osajono (x_{n_j}) , joka suppenee kohti vektoria $y \in E$, niin myös koko jonolle pätee $\lim_n x_n = y$.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Valitaan Cauchyn ehdosta sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\|x_k - x_j\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kaikilla } k, j \geq m_\varepsilon.$$

Koska $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = y$, niin on olemassa sellainen indeksi $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ että kaikilla $j \geq j_\varepsilon$ pätee $n_j \geq m_\varepsilon$ ja $\|x_{n_j} - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin, jos $j \geq j_\varepsilon$ on kiinteä, niin

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - x_{n_j}\| + \|x_{n_j} - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kaikilla $n \geq m_\varepsilon$. Siis $\lim_n x_n = y$. \square

3.23. Lause. Normiavaruus E on Banachin avaruus jos ja vain jos jokainen avaruuden E absoluuttisesti suppeneva sarja $\sum_k x_k$ suppenee avaruudessa E .

Todistus.

" \Rightarrow " Olkoon E Banachin avaruus ja $\sum_k x_k$ avaruuden E absoluuttisesti suppeneva sarja. Jos $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, ja $s_m = \sum_{k=1}^m x_k$ on sarjan m :s osasumma, niin

$$\begin{aligned} \|s_{n+p} - s_n\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n+p} x_j - \sum_{j=1}^n x_j \right\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\| \\ &\stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} \sum_{j=n+1}^{n+p} \|x_j\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|x_j\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

kaikilla $p \in \mathbb{N}$, kun $n \rightarrow \infty$ (suppenevan sarjan jäännöstermi). Siis (s_n) on Cauchyn jono avaruudessa E , joten se suppenee.

" \Leftarrow " Oletetaan, että avaruuden E jokainen absoluuttisesti suppeneva sarja suppenee. Olkoon (x_n) Cauchyn jono avaruudessa E . Lauseen 3.22 nojalla riittää löytää suppeneva osajono (x_{n_j}) . Konstruoidaan osajono (x_{n_j}) induktiolla seuraavasti:

Koska (x_n) on Cauchyn jono, niin löytyy sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että

$$\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2}$$

kaikilla $p, q \geq n_0$. Oletetaan, että on jo valittu luvut $n_0 < n_1 < \dots < n_j$ joille

$$\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^{k+1}}$$

kaikilla $p, q \geq n_k$ ja $k = 0, 1, \dots, j$. Valitaan seuraavaksi n_{j+1} . Koska jono (x_n) on Cauchyn jono, niin löytyy sellainen $n_{j+1} \in \mathbb{N}$, että $n_{j+1} > n_j$ ja

$$\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^{j+2}}$$

kaikilla $p, q \geq n_{j+1}$. Näin jatkamalla saadaan osajono $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$.

Merkitään nyt $y_0 = x_{n_0}$, $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$ kun $j = 1, 2, \dots$. Tällöin $\|y_j\| = \|x_{n_j} - x_{n_{j-1}}\| < \frac{1}{2^j}$ kaikilla $j = 1, 2, \dots$, sillä $n_j > n_{j-1}$ ja arvio seuraa valitsemalla $p = n_j$ ja $q = n_{j-1}$.

Siispä sarja $\sum y_j$ on absoluuttisesti suppeneva, sillä

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|y_j\| < \|y_0\| + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} < \infty.$$

Oletuksen nojalla sarja $\sum y_j$ siis suppenee. Merkitään sarjan summaa

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j$$

ja tarkastellaan sarjan $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ osasummia. Havaitaan, että itse asiassa

$$\sum_{j=0}^k y_j = x_{n_0} + (x_{n_1} - x_{n_0}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = x_{n_k} \quad \text{kaikilla } k.$$

Näin ollen jonon (x_n) osajono $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee kohti pistettä $y \in E$. Tällöin Lauseen 3.22 nojalla siis myös jono (x_n) suppenee kohti pistettä y ja E on täydellinen. \square

Lauseen 3.23 nojalla voidaan usein osoittaa avaruuden täydellisyys. Esimerkiksi reaalityökalujen joukon R tapauksessa voidaan päätellä seuraavasti: Olkoon $\sum a_k$ itseisesti suppeneva sarja R :ssä. Merkitään $b_k = |a_k| - a_k$, kun $k \in \mathbb{N}$. Tällöin $0 \leq b_k \leq 2|a_k|$ kaikilla k , joten sarja $\sum b_k$ suppenee vertailuperiaatteen nojalla. Koska $a_k = |a_k| - b_k$, suppenee sarja $\sum a_k$ myös. Siis Lause 3.23 sanoo, että \mathbb{R} on täydellinen.

Absoluuttisesti suppenevien sarjojen kriteerin avulla myös avaruuksien ℓ^p täydellisyys saadaan verraten ”kivuttomasti”.

3.24. Lause. *Jonoavaruus $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ on Banachin avaruus kaikilla $1 \leq p < \infty$.*

Todistus. Olkoon $\sum x^{(n)}$ absoluuttisesti suppeneva sarja avaruudessa ℓ^p , eli $x^{(n)} \in \ell^p$ kaikilla n ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p < \infty.$$

Jos merkitään jonoa $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, niin

$$|x_k^{(n)}| \leq \left(\sum_i |x_i^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x^{(n)}\|_p$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_k^{(n)}| < \infty, \quad \text{kullakin } k \in \mathbb{N}.$$

Siten skalaarilukujen sarja $\sum_n x_k^{(n)}$ suppenee, sillä \mathbb{K} on täydellinen. Merkitään

$$y_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_k^{(n)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Olemme näin löytäneet uuden lukujonon $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Väitämme, että

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x^{(n)},$$

missä sarjan suppeneminen tapahtuu avaruudessa ℓ^p .

Olkoon $\varepsilon > 0$. Absoluuttisen suppenevuuden perusteella löytyy sellainen $m \in \mathbb{N}$, että

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p \leq \varepsilon.$$

Olkoon $i, r, s \in \mathbb{N}$, $m \leq r < s$. Koska kyseessä on äärellinen summa, niin saadaan itseisarvon jatkuvuuden avulla

$$\sum_{k=1}^i \left| y_k - \sum_{n=1}^r x_k^{(n)} \right|^p = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^i \left| \sum_{n=1}^s x_k^{(n)} - \sum_{n=1}^r x_k^{(n)} \right|^p = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^i \left| \sum_{n=r+1}^s x_k^{(n)} \right|^p.$$

Toisaalta, avaruuden ℓ^p kolmioepäyhtälön perusteella

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^i \left| \sum_{n=r+1}^s x_k^{(n)} \right|^p &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{n=r+1}^s x_k^{(n)} \right|^p = \left\| \sum_{n=r+1}^s x^{(n)} \right\|_p^p \\ &\leq \left(\sum_{n=r+1}^s \|x^{(n)}\|_p \right)^p \leq \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p \right)^p \leq \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Kun annetaan tässä $s \rightarrow \infty$, niin

$$\sum_{k=1}^i \left| y_k - \sum_{n=1}^r x_k^{(n)} \right|^p \leq \varepsilon^p$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $r \geq m$. Antamalla lopuksi $i \rightarrow \infty$ nähdään, että

$$\left\| y - \sum_{n=1}^r x^{(n)} \right\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left| y_k - \sum_{n=1}^r x_k^{(n)} \right|^p \leq \varepsilon^p,$$

kun $r \geq m$. Erityisesti siis jono $(y_k - \sum_{n=1}^m x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, joten Lauseen 2.23 sivulla 20 nojalla

$$y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(y_k - \sum_{n=1}^m x_k^{(n)} \right)_{k \in \mathbb{N}} + \left(\sum_{n=1}^m x_k^{(n)} \right)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p.$$

Lisäksi

$$\left\| y - \sum_{n=1}^r x^{(n)} \right\|_p \leq \varepsilon \text{ kaikilla } r \geq m.$$

Näin ollen sarja $\sum x^{(n)}$ suppenee ja Lauseen 3.23 sivulla 40 nojalla ℓ^p on Banachin avaruus. \square

L^p -AVARUUDET

Haluamme seuraavaksi määritellä jonoavaruuden ℓ^p vastineet ”jatkuvassa” tapauksessa, eli avaruudet joiden normit kuvauksille $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ saadaan suoreista

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Päädymme näin L^p -avaruuksien käsitteeseen. Tämän tarkempi/syvällisempi teoria kuuluu kurseihin *Mitta- ja integraali* sekä *Reaalianalyysi*. L^p -avaruudet ovat kuitenkin keskeisiä esimerkkejä Funktionaalianalyysissä ja sen sovelluksissa; lisäksi Hilbert-avaruuksien (todellisesta) käytöstä ei saa kunnan kuvaa ilman L^2 -avaruuksia. Käymme siksi alla L^p -avaruuksien perusideat läpi, erityisesti niitä lukijoita silmällä pitäen, jotka eivät ole vielä suorittaneet yo. kursseja. Keskitymme nimenomaan ideoitten esittelyyn ja sivuutamme useiden mittateoreettisten väitteiden todistukset, jotka jäävät Mittateorian kursseilla käsiteltäviksi.

Tämän kurssin tarpeisiin riittää tarkastella (Lebesgue-)mitallisia osajoukkoja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja n -ulotteista Lebesguen mitta μ (allaoleva pätee kuitenkin myös yleisissä mitta-avaruuksissa (Ω, Σ, μ) , missä Σ on jokin joukkoon Ω liittyvä σ -algebra ja μ on Σ :ssa määritelty positiivinen mitta). Muotoa

$$f = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{E_k}$$

olevia funktioita kutsutaan yksinkertaisiksi funktioiksi; tässä $a_k \in \mathbb{K}$, $E_k \subset \Omega$ on mitallinen joukko kun $k = 1, \dots, m$. Edellä joukon E karakteristinen funktio on $\chi_E(x) = 1$ jos $x \in E$ ja $\chi_E(x) = 0$ kun $x \notin E$. Yksinkertaisen funktion $f = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{E_k}$ integraali määritellään helposti kaavalla

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^m a_k \mu(E_k).$$

[Muista myös: m.k. \equiv melkein kaikkialla, so. nollamittaisen joukon ulkopuolella.]

Yleisemmin, jos $0 \leq f$ on mitallinen funktio, niin löytyy sellainen jono yksinkertaisia funktioita f_n , että $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f$ ja $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ melkein kaikkialla. (Itse asiassa funktio on mitallinen jos ja vain jos se on yksinkertaisten funktioiden pisteittäinen raja m.k. $x \in \Omega$.) Asetetaan

$$(3.25) \quad \int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu,$$

missä funktioiden f_n integraalit muodostavat kasvavan lukujonon, ja siten yo. raja-arvo on olemassa (voi olla ∞).

Mittateoriassa näytetään että määritelmän (3.25) raja-arvo on riippumaton approksimoivan jonon (f_n) valinnasta. Lisäksi voi hyvin olla että (3.25):n raja-arvo, ja siten integraali $\int_{\Omega} f d\mu$, on ∞ ! Tämän pulman välttämiseksi sanotaan, että mitallinen funktio $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ on *integroituva*, mikäli $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$.

Jos nyt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on integroituva mitallinen funktio, niin sen positiivinen osa $f_+ = \max\{f(x), 0\}$ ja negatiivinen osa $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ ovat molemmat integroituvia, ja voimme asettaa

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f_+ d\mu - \int_{\Omega} f_- d\mu.$$

Kompleksiarvoiselle funktiolle $f = u + iv$ asetetaan lopuksi

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} u d\mu + i \int_{\Omega} v d\mu.$$

Mittateoriassa osoitetaan, että jos $\Delta \subset \mathbb{R}$ on suljettu ja rajoitettu väli, ja f on Riemann integroituva Δ :ssa (erityisesti, jos f on jatkuva!), niin silloin edellä määritelty integraali on täsmälleen sama kuin tuttu Riemann integraali!!

Olkoon sitten $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $\mu(\Omega) > 0$, missä μ on Lebesguen mitta avaruudessa \mathbb{R}^n . Määrittelemme aluksi joukon $L^{(p)}(\Omega) = L^{(p)}$ niiden mitallisten funktioiden $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ joukkona, joille

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

Jotta $L^{(p)}$ olisi vektoriavaruus, on näytettävä, että $\|\cdot\|_p$ on seminormi avaruudessa $L^{(p)}$. Tähän tarvitaan (kuten ℓ^p -avaruuksien tapauksessa) Hölderin epäyhtälöä.

3.26. Lemma (Hölderin epäyhtälö). *Jos $f \in L^{(p)}$ ja $g \in L^{(q)}$, missä $1 < p, q < \infty$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, niin tällöin (pisteittäinen) tulo $fg \in L^{(1)}$ ja*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \text{eli}$$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Todistus. Jos $\|f\|_p = 0$, niin $f(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$, jolloin myös tulo $f(x)g(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$ ja siis $\int |fg| d\mu = 0$. Samoin pätee jos $\|g\|_q = 0$. Näissä tapauksissa väite on ilmeinen.

Voidaan siis olettaa, että $\|f\|_p \|g\|_q > 0$. Sovelletaan Lemmaa 2.17 sivulla 17 valitsemalla (kun $x \in \Omega$)

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{ja} \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

mistä seuraa epäyhtälö

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}, \quad x \in \Omega.$$

Integroimalla tämä puolittain muuttujan x suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \|f\|_p^{-1} \|g\|_q^{-1} \int_{\Omega} |fg| \, d\mu &\leq \frac{1}{p} \|f\|_p^{-p} \int_{\Omega} |f(x)|^p \, d\mu + \frac{1}{q} \|g\|_q^{-q} \int_{\Omega} |g(x)|^q \, d\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

□

3.27. Seuraus (Minkowskin epäyhtälö). *Jos $f, g \in L^{(p)}$ ja $1 \leq p < \infty$, niin*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Todistus. HT.

□

Koska selvästi $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, niin $L^{(p)}$ on tämän ja Minkowskin epäyhtälön nojalla \mathbb{K} -kertoiminen vektoriavaruus. Mutta avaruudessa $L^{(p)}$ on se pulma, että $\|\cdot\|_p$ ei ole normi:

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \Omega!$$

(Siis $f \mapsto \|f\|_p$ on vain *seminormi*). Pulmasta selvitäksemme, samaistamme kaikki ne funktiot, jotka ovat samoja m.k. x .

Seuraava esimerkki antaa mielikuvan mitä tämä samaistaminen käytännössä merkitsee. Integroidaan vaikkapa seuraava funktio välillä $[0, 1]$,

$$f(x) = x, \text{ kun } 0 \leq x < 1/2 \text{ ja } f(x) = 3, \text{ kun } 1/2 \leq x \leq 1.$$

Voisimme myös asettaa (Piirrä funktioiden kuvaajat !)

$$g(x) = x, \text{ kun } 0 \leq x \leq 1/2 \text{ ja } f(x) = 3, \text{ kun } 1/2 < x \leq 1,$$

koska ei ole mitään luonnollista tapaa valita f :n arvoa epäjatkuvuuspisteessä $x = 1/2$; selvästi molemmat valinnat ovat yhtä hyviä, ja integroinnin kannalta molemmat valinnat tuottavat saman tuloksen. Onkin siksi järkevää samaistaa nämä funktiot !

Yleisemmin, annetulla funktiolla voi olla paljon enemmän epäjatkuvuus- (tai ”epämääräisyys-)-pisteitä, joten saman filosofian mukaan on järkevää samaistaa funktiot f ja g , jos $f(x) = g(x)$ nollamittaista x :ien joukkoa lukuunottamatta.

Täsmällistä määrittelyä varten sanotaan että funktiot $f, g \in L^{(p)}$ ovat ekvivalentit, merk. $f \sim g$, jos $f = g$ m.k. $x \in \Omega$ eli $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Asetetaan

$$[f] = \{g \in L^{(p)} : g \sim f\}, \quad f \in L^{(p)}.$$

Huomataan, että jos $f_1 \sim g_1$ ja $f_2 \sim g_2$ niin $(f_1 + f_2) \sim (g_1 + g_2)$. Tämä seuraa siirtymällä komplementteihin inkluusiossa

$$\{x : f_1(x) = g_1(x)\} \cap \{x : f_2(x) = g_2(x)\} \subset \{x : f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x)\}.$$

Samoin $af_1 \sim af_2$ jos $f_1 \sim f_2$ ja $a \in \mathbb{K}$. Näin ekvivalenssiluokat muodostavat vektoriavaruuden:

$$[af + bg] = a[f] + b[g] \quad \text{kun } f, g \in L^{(p)}, \quad a, b \in \mathbb{K}.$$

(Selvitä itsellesi tämän yksityiskohdat !). Määritellään nyt

$$(3.28) \quad L^p(\Omega) = \{[f] : f \in L^{(p)}(\Omega)\}.$$

Huomataan että $\|f\|_p = \|g\|_p$ aina kun $f \sim g$, joten

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p, \quad f \in L^{(p)},$$

on siten hyvin määritelty. Edelleen, $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow [f] = [0]$, eli avaruudessa $L^p(\Omega)$ suure $\|\cdot\|_p$ on *normi*.

Käytännössä pidämme (so. kohtelemme) $L^p(\Omega)$:n elementtejä funktioina. Myös siisteissä tapauksissa, esimerkiksi jos luokassa $[f]$ on jatkuva funktio, valitsemme sen luokan edustajaksi, eikä tulkinta $f \in L^p(\Omega)$ tuota pulmia.

Kuitenkin, yleisessä tapauksessa L^p -funktion arvo ei ole pisteittäin hyvin määritelty. Jos tarvitsemme tiettyä arvoa $f(x)$, joudumme valitsemaan luokasta $[f]$ yhden edustajan; jos haluamme näin saada tietoa koko luokasta $[f]$, meidän on tällöin huolehdittava siitä, että päättelyjen lopputulos ei riipu edustajan f valinnasta !!

(*Vaihtoehto*. [Mainitaan lyhyesti vuoden 2010 luennoilla] Määritellään $L^p(\Omega)$ tulkitsamalla yo. konstruktio enemmän lineaarialgebrallisin keinoin, käyttäen vektoriavaruuden tekijäavaruuksia. Tarkemmin, olkoon X vektoriavaruus ja M sen aliavaruus. Koska X on yhteenlaskun suhteen Abelin ryhmä ja M sen aliryhmä, voimme muodostaa tekijäryhmän X/M , jonka alkioina ovat jäännösluokat modulo M ,

$$x + M, \quad x \in X.$$

Tässä $x + M = \{x + m : m \in M\}$ on määritelty joukkona, kuten Luvussa 2. Asetetaan yhteenlasku ja skalaarilla kertominen luonnollisilla kaavoilla

$$(3.29) \quad (x + M) + (y + M) = (x + y) + M$$

$$(3.30) \quad \lambda(x + M) = \lambda x + M$$

ja näin saadaan tekijäryhmästä X/M vektorialiavaruus.³

Olkoon nyt $M = \{f \in L^{(p)} : f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \Omega\}$, joka on avaruuden $L^{(p)}$ vektorialiavaruus.

3.31. Määritelmä. Avaruus $L^p = L^{(p)}/M$ on tekijäavaruus $L^{(p)}/M$.

Huomataan, että edellä $f + M = g + M$ jos ja vain jos $f - g \in M$, eli siis $f \sim g$. Kuten edellä todettiin, $\|f\|_p$ on sama kaikille funktioille $f \in L^{(p)}$, jotka poikkeavat toisistaan enintään 0-mittaisessa joukossa, joten lauseke

$$\|f + M\|_p = \|f\|_p, \quad f \in L^{(p)},$$

on hyvin määritelty tässäkin vaihtoehdossa. Näin tekijäavaruuskonstruktio tuottaa "saman" avaruuden L^p kuten edellä.

Jos $f \in L^{(p)}$ on yleensä tapana merkitä funktion f määräämää tekijäavaruuden L^p alkioita eli luokkaa $f + M$ myös symbolilla f ! Tässä on siis taas pidettävä mielessä, että jos kaksi avaruuteen $L^{(p)}$ kuuluvaa funktiota poikkeaa toisistaan enintään 0-mittaisessa joukossa, ne ovat avaruuden L^p alkioina samoja.)

Seuraava tulos on keskeinen Funktionaalianalyttisiä sovelluksia silmälläpitäen.

3.32. Lause. *Olkoon $1 \leq p < \infty$. Tällöin $(L^p, \|\cdot\|_p)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Edellisestä keskustelusta seuraa, että L^p on normiavaruus. (Huomaa, että Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöt pätevät myös avaruudessa L^p ; Mieti miksi näin on!).

L^p -avaruuksien täydellisyys kuuluu oikeastaan Reaalianalyysin kurssin materiaaliin, sillä päättely tarvitsee muutaman perustuloksen Lebesgue-integroinnista. Siksi ne lukijat, jotka eivät ole vielä Reaalianalyysiä seuranneet, voivat ottaa tuloksen annettuna; todistuksen argumentteja ei tarvita muualla tässä kurssissa.

Luonnostelemme alla kuitenkin täydellisyystodistuksen pääpiirteet, jotta Mit-tateoriaan perehtymätönkin lukija saa mielikuvan miten mitallisten funktioiden kanssa operoidaan. Täydellisyysargumentti on itse asiassa analoginen ℓ^p avaruuksien tapauksen kanssa.

³Tarkemmin tätä ideaa selvitetään Lineaarialgebran jatkokurssilla.

L^p -avaruuksien täydellisyyttä varten tarvitaan seuraavia Mitta ja integraalin -kurssin aputuloksia:

3.33. Lemma. (i) [Monotonisen konvergenssin lause] Jos $f_n: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ on jono mitallisia kuvauksia, joille $0 \leq f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots$ kaikilla $x \in \Omega$, niin

$$\int_{\Omega} \lim_n f_n(x) d\mu(x) = \lim_n \int_{\Omega} f_n(x) d\mu(x).$$

(ii) [Fatoun Lemma] Jos $f_n: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ on mitallinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\mu(x).$$

Todistus. (i) Todistus löytyy Mitta ja Integraali -kurssilta.

(ii) Olkoon $g_k(x) = \inf_{n \geq k} f_n(x)$. Silloin g_k on mitallinen, $g_k \leq f_k$, $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$ sekä

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Koska (g_k) on kasvava funktiojono, niin (i)-osan mukaan $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k d\mu = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k d\mu$. Erityisesti,

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_j(x) d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(x) d\mu.$$

□

Lauseen 3.32 todistus jatkuu. Olkoon $\sum_n f_n$ absoluuttisesti suppeneva sarja avaruudessa L^p , eli $M = \sum_n \|f_n\|_p < \infty$. Lauseen 3.23 sivulla 40 nojalla riittää osoittaa, että $\sum_n f_n$ suppenee L^p :ssa. Kiinnitetään edustaja $f_n \in L^{(p)}$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Riittää löytää sellainen $f \in L^{(p)}$, jolle

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k f_n - f \right\|_p = 0.$$

Jos merkitään

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^k |f_n(x)|, \quad x \in \Omega,$$

niin avaruuden $L^{(p)}$ kolmioepäyhtälön nojalla

$$\|g_k\|_p = \left\| \sum_{n=1}^k |f_n| \right\|_p \leq \sum_{n=1}^k \|f_n\|_p \leq M, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Monotonisen konvergenssin lauseen 3.33.(i) nojalla

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right)^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^k |f_n| \right)^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_p^p \leq M^p < \infty.$$

Siis funktio $g(x) := \sum^{\infty} |f_n(x)| \in L^{(p)}$ ja edelleen tästä seuraa, että $g(x) < \infty$ m.k. x ja näillä x sarja

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

suppenee avaruudessa \mathbb{K} . Asetetaan $f(x) = 0$, jos $g(x) = \infty$, jolloin $|f(x)| \leq g(x)$ kaikilla $x \in \Omega$ ja siis $f \in L^{(p)}$. Lisäksi Fatoun lemmän 3.33.(ii) nojalla

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| f - \sum_{n=1}^k f_n \right|^p d\mu &= \int_{\Omega} \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1}^j f_n - \sum_{n=1}^k f_n \right|^p d\mu \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \sum_{n=1}^j f_n - \sum_{n=1}^k f_n \right|^p d\mu. \end{aligned}$$

Otetaan nyt p :nnet juuret puolittain saadusta epäyhtälöstä, jolloin

$$\left\| f - \sum_{n=1}^k f_n \right\|_p \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=k+1}^j f_n \right\|_p \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=k+1}^j \|f_n\|_p = \sum_{n=k+1}^{\infty} \|f_n\|_p \rightarrow 0,$$

kun $k \rightarrow \infty$ (oikealla oleva on suppenevan sarjan jäännöstermi). Siispä jokainen avaruuden L^p normisuppeneva sarja suppenee, joten L^p on täydellinen eli L^p on Banachin avaruus. \square

Yllä oletettiin, että $1 \leq p < \infty$. Tapaus $p = \infty$ on itse asiassa helpompi. Koska tapauksissa $1 \leq p < \infty$ samaistimme funktiot, jotka poikkeavat enintään 0-mittaisessa joukossa, haetaan nyt tälle vastine kun $p = \infty$. Päädymme seuraavaan käsitteeseen:

3.34. Määritelmä. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mitallinen osajoukko. Mitallinen funktio $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ on *oleellisesti rajoitettu*, jos on olemassa $0 \leq M < \infty$, jolle $|f(x)| \leq M$ kaikilla x jonkin 0-mittaisen joukon ulkopuolella, toisin sanoen $\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0$. Funktion f *oleellinen supremum* eli

$$\|f\|_{\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

on infimum kaikista edellä mainituista luvuista M , siis

$$\|f\|_{\infty} := \inf \{ M : \text{mitta } \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0 \}.$$

Kuten tapauksessa $1 \leq p < \infty$ samaistamme taas $f \sim g$, jos $f(x)$ ja $g(x)$ poikkeavat enintään 0-mittaisessa joukossa. Merkitään

$$L^{\infty} = L^{\infty}(\Omega) = \{[f] : f \text{ oleellisesti rajoitettu } \Omega \rightarrow \mathbb{K}\},$$

missä siis $[f] = \{g : g \sim f, g \text{ on oleellisesti rajoitettu}\}$ on vastaava ekvivalenssiluokka.

Kuten edellä, tulemme säännöllisesti käyttämään merkintää $f \in L^\infty$, kun tarkkaan ottaen tarkoitetaan, että f :n määräämä luokka $[f] \in L^\infty$.

3.35. Lause. $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Todistus. Taas tarvitaan hieman Mittateorian tietoja, ja siksi ne lukijat jotka eivät ole Reaalianalyysia seuranneet, voivat toki ottaa Lauseen 3.35 tuloksen annettuna. Selvyyden vuoksi annamme kuitenkin tässä todistuksen yksityiskohdat.

(1) jos $f \in L^\infty$ (on mitallinen edustaja $\Omega \rightarrow \mathbb{K}$), niin tällöin

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ m.k. } x \in \Omega,$$

sillä mitan μ subadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty + 1/n\}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty + 1/n\}) = 0. \end{aligned}$$

(2) L^∞ on vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_\infty$ on normi: Koska $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ ja $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ m.k. $x \in \Omega$, saadaan

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ m.k. } x \in \Omega,$$

joten $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. (Selvitä itsellesi miksi $\|af\|_\infty = |a|\|f\|_\infty$ kaikilla $f \in L^\infty$!)

3) L^∞ on täydellinen: Olkoon (f_n) Cauchyn jono avaruudessa L^∞ . Lauseen 3.3 sivulla 32 nojalla jono on rajoitettu eli $\|f_n\|_\infty \leq M < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kiinnitetään mitalliset edustajat $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$. Olkoon A_k ja $B_{n,m}$ ne joukon Ω osajoukot, joissa $|f_k(x)| > \|f_k\|_\infty$ ja $|f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty$. Kohdan (1) nojalla joukot A_k ja $B_{n,m}$ ovat 0-mittaisia. Asetetaan

$$E = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \cup \left(\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{n,m}\right).$$

Tällöin mitan subadditiivisuuden perusteella

$$\mu(E) \leq \sum_k \mu(A_k) + \sum_{n,m} \mu(B_{n,m}) = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska (f_n) on Cauchyn jono, löytyy sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

kaikilla $n, m \geq n_\varepsilon$. Kun $x \in \Omega \setminus E$, niin

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

kaikilla $n, m \geq n_\varepsilon$, koska $B_{n,m} \subset E$, joten $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ on Cauchyn jono avaruudessa \mathbb{K} . Siispä \mathbb{K} :n täydellisyysnojan nojalla on olemassa raja-arvo $f(x) := \lim f_n(x)$ jokaisella $x \in \Omega \setminus E$. Asetetaan $f(x) = 0$, kun $x \in E$. Tällöin f on mitallinen kuvaus, ja koska

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \leq M$$

kaikilla $x \in \Omega \setminus E$, niin $f \in L^\infty$. Samoin on voimassa

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon,$$

kaikilla $n \geq n_\varepsilon$ ja $x \in \Omega \setminus E$. Koska $\mu(E) = 0$, niin tästä seuraa, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

□

Huomautus. Yleisimmin vastaavasti määritellään Banachin avaruus $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, kun (Ω, Σ, μ) on (täydellinen) mitta-avaruus ja $1 \leq p \leq \infty$ (vrt. Reaalianalyysi I, 1.4-1.6). Tässä Σ on σ -algebra joukossa Ω ja $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ on positiivinen mitta.

Huomautus [ei luennoilla vuonna 2010]: Avaruuden L^∞ täydellisyys voidaan todistaa myös käyttäen edellä kuvattua tekijäavaruuden struktuuria. Nimitetään, jos M on avaruuden X vektorialiavaruus niin yhtälöiden (3.29) avulla määriteltiin uusi vektoriavaruus X/M . Jos nyt X on normiavaruus ja M sen suljettu vektorialiavaruus, saadaan X/M :stä normiavaruus asettamalla

$$\|x + M\|_{X/M} = \inf\{\|x + m\| : m \in M\} = \inf\{\|x - m\| : m \in M\} = \text{dist}(x, M)$$

Helposti nähdään että $\|x + M\|_{X/M}$ on normi: Jokaisella $m_1, m_2 \in M$

$$\|x + y + M\|_{X/M} \leq \|x + y + m_1 + m_2\| \leq \|x + m_1\| + \|y + m_2\|$$

ja ottamalla inf yli vektoreiden m_1, m_2 , saadaan

$$\|x + y + M\|_{X/M} \leq \|x + M\|_{X/M} + \|y + M\|_{X/M}$$

Samalla tavalla nähdään, että $\|ax + M\|_{X/M} = |a| \|x + M\|_{X/M}$. Lisäksi, ylläolevasta seuraa, että $\|x + M\|_{X/M} = 0 \Leftrightarrow \text{dist}(x, M) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{M} = M$, eli $x + M = 0 + M$, avaruuden X/M nolla-alkio.

Lisäksi, harjoituksissa näytetään, että jos X on Banach avaruus ja $M \subset X$ on suljettu v.a.a, niin silloin X/M on Banach avaruus.

Valitsemalla nyt $X = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \text{ rajoitettu ja mitallinen} \} \subset B(\Omega, \mathbb{K})$ havaitaan mittateorian avulla, että X on suljettu $B(\Omega, \mathbb{K})$:ssa, ja siis Banach

avaruus. Jos $M = \{f \in X : f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \Omega\}$, niin silloin voidaan samaistaa

$$L^\infty = X/M.$$

(Väitteen yksityiskohdat jätetään ylimääräiseksi harjoitustehtäväksi. Huomaa, että samaistuksessa pitää valita alkion $f \in L^\infty$ rajoitettu edustaja $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, $g \sim f$, jolle esimerkiksi $|g(x)| \leq \|f\|_\infty$ kaikilla $x \in \Omega$. Näin määriteltynä L^∞ on Banachin avaruus harjoitustehtävän 3:10 perusteella.)

BANACHIN KIINTOPISTELAUSE (EPÄLINEAARINEN FA)

Seuraava täydellisyyden aspekti on osoittautunut hyödylliseksi ja monipuoliseksi työkaluksi monissa eri funktionaalianalyysin sovelluksissa.

3.36. Määritelmä. Olkoon E Banach-avaruus ja $D \subset E$ osajoukko ($D \neq \emptyset$). Kuvaus $T : D \rightarrow E$ on *kontraktio* D :ssä, jos

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \quad \text{kaikilla } x, y \in D.$$

Kuvaus $T : D \rightarrow E$ on *aito kontraktio* jos on olemassa sellainen vakio $0 \leq k < 1$, että

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \text{kaikilla } x, y \in D.$$

Jokainen kontraktio $T : D \rightarrow E$ on tasaisesti jatkuva D :ssä. (Huomaa, että kontraktion ei tarvitse olla lineaarinen kuvaus.) Piste $x \in D$ on kuvauksen $T : D \rightarrow E$ *kiintopiste*, jos $T(x) = x$.

Huomautus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $D \subset X$ osajoukko. Vastaavalla tavalla määritellään (aito) kontraktio $T : D \rightarrow X$ ja sen kiintopiste.

3.37. Lause (Banachin kiintopistelause, 1922). *Olkoon E Banachin avaruus ja $D \subset E$ suljettu osajoukko ja $T : D \rightarrow D$ aito kontraktio. Tällöin kuvauksella T on yksikäsitteinen kiintopiste $x \in D$ (eli $T(x) = x$).*

Todistus. Jos $x_0 \in D$ on mielivaltainen, asetetaan rekursiivisesti

$$\begin{cases} x_1 = T(x_0), \\ x_{n+1} = T(x_n), \quad \text{kun } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Merkitään $\alpha_n = \|x_{n+1} - x_n\|$ ($n \in \mathbb{N}$). Tällöin

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \|x_{n+1} - x_n\| = \|T(x_n) - T(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \\ (3.38) \quad &= k\|T(x_{n-1}) - T(x_{n-2})\| \leq k^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\ &\leq \dots \leq k^n\|x_1 - x_0\| = k^n\alpha_0, \end{aligned}$$

kun $n \in \mathbb{N}$. Kolmioepäyhtälöä, arviota (3.38) ja geometrisen sarjan summa-kaavaa käyttämällä saadaan kaikilla $p = 1, 2, \dots$ ja $n \in \mathbb{N}$ arvio

$$(3.39) \quad \begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{j=n}^{n+p-1} \|x_{j+1} - x_j\| = \sum_{j=n}^{n+p-1} \alpha_j \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} k^j \alpha_0 \\ &= \alpha_0 k^n \sum_{j=0}^{p-1} k^j \leq \alpha_0 k^n \sum_{j=0}^{\infty} k^j = \frac{\alpha_0 k^n}{1-k} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$. Siis $(x_n) \subset E$ on Cauchyn jono. Koska E Banachin avaruus, niin on olemassa $\lim_n x_n = x \in E$. Koska $x_n = T(x_{n-1}) \in D$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$, niin

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{D} = D,$$

koska D oletettiin suljetuksi. Edelleen kontraktio-oletuksesta seuraa, että T jatkuva, joten

$$T(x) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x,$$

eli x on kiintopiste. Osoitetaan vielä, että x on yksikäsitteinen. Olkoon $y \in D$ toinen kiintopiste-ehdokas kuvaukselle T eli $T(y) = y$. Tällöin

$$\|x - y\| = \|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\|$$

jollakin $0 \leq k < 1$, sillä T on aito kontraktio. Siispä ainoa mahdollisuus on, että $\|x - y\| = 0$ eli $x = y$. \square

Huomautus. (1) Yllä olevassa todistuksessa kiintopiste x löytyi iteroimalla:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n), \text{ missä } x_n = T(x_{n-1}) = \dots = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ kpl}}(x_0) = T^n(x_0),$$

missä $x_0 \in D$ oli jopa mielivaltainen. Lisäksi epäyhtälöstä (3.39) saadaan virhearvio (antamalla siinä $p \rightarrow \infty$):

$$(3.40) \quad \|x - T^n(x_0)\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|T(x_0) - x_0\|$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(2) Kiintopistelause ei päde kaikille kontraktioille $T : D \rightarrow D$, missä ainoastaan on voimassa heikompi arvio $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ kaikilla $x, y \in D$. (Vertaa harjoitustehtäviä 3:11 ja 3:12).

Seuraavaksi tarkastellaan parilla esimerkillä kuinka Banachin kiintopistelauseita voidaan soveltaa. Sovelluskohteita on itse asiassa lukematon määrä, aina yhden muuttujan numeriiikasta esim. fraktaaligeometriaan asti. Sovelluksissa on tietysti löydettävä kuhunkin ongelmaan sopiva Banachin avaruus ja vastaava kontraktiokuvaus.

3.41. **Esimerkki.** Johdantoluvussa [vrt. (0.2)] lupasimme ratkaista integraaliyhtälön

$$(3.42) \quad f(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s)f(s)ds = g(x), \quad x \in [0, 1],$$

ainakin kun parametri λ on pieni. Nyt meillä on koossa tässä tapauksessa tarvittavat ratkaisun elementit.

Annetuista funktioista $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ oletettiin että ne ovat jatkuvia. Siksi on luontevaa valita alla olevaksi Banach avaruudeksi $C(0, 1)$ sup-normilla $\|\cdot\|_\infty$ varustettuna. Sopiva kontraktiokuvaus voidaan muodostaa monellakin tavalla; niistä helpoin ja luonnollisin on ehkä

$$(3.43) \quad T : C(0, 1) \rightarrow C(0, 1), \quad (Tf)(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s)f(s)ds,$$

sillä heti nähdään, että f on T :n kiintopiste (eli $T(f) = f$) jos ja vain jos f ratkaisee yhtälön (3.42). (Tässä T ei ole lineaarokuvaus jos $g \neq \bar{0}$.)

Esimerkin 2.31 tuloksista seuraa, että $T : C(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$ on jatkuva kuvaus. Saman Esimerkin menetelmillä voimme myös tarkemmin selvittää milloin T on aito kontraktio. Nimittäin

$$\begin{aligned} \|Tf - Th\|_\infty &= \sup_{x \in [0, 1]} \left| \int_0^1 \lambda K(x, s)(f(s) - h(s)) ds \right| \\ &\leq |\lambda| \|K\|_\infty \|f - h\|_\infty, \end{aligned}$$

missä $\|K\|_\infty = \sup\{|K(x, s)| : x, s \in [0, 1]\}$. Havaitaan siis että T on aito kontraktio jos λ on niin pieni, että $|\lambda| < 1/\|K\|_\infty$.

Banachin kiintopistelauseesta seuraa nyt että jos $|\lambda| < 1/\|K\|_\infty$, niin kuvauksella T on kiintopiste $f \in C(0, 1)$ ja siten samalla yhtälöllä (3.42) on ratkaisu f ; lisäksi f on yksikäsitteinen. (Tässä sovelluksessa $D = C(0, 1)$.)

Banachin kiintopistelause on varsin vahva, sillä se antaa myös nopean algoritmin integraaliyhtälön ratkaisun f konstruoimiseksi (esim. numeerisesti): Lauseen jälkeisen huomautuksen mukaan $f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ missä (valitsemalla iteroinnissa alkuarvoksi $g_0 = g$)

$$g_0(x) = g(x), \quad g_1(x) = (Tg_0)(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s)g(s)ds,$$

$$g_2(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s)g(s)ds + \lambda^2 \int_0^1 K(x, t) \left(\int_0^1 K(t, s)g(s)ds \right) dt,$$

ja niin edelleen. Lisäksi, arvion (3.40) perusteella jonon (g_n) suppeneminen on eksponentiaalista.

Ainoa pulma Banachin kiintopistelauseessa on että se toimii vain (aidoille) kontraktioille. Erityisesti, herää kysymys: miten yhtälöt (3.42) käyttäytyvät yleisillä parametreilla λ ?!

Seuraava esimerkki näyttää, että yllä λ :n pienuus oli olennaista; yleisten parametrien tapaus on siis paljon monimutkaisempi.

3.44. Esimerkki (Ei luennoilla 2010). Valitaan integraaliyhtälön (3.42) ytimeksi $K(x, s) = xs$, $0 \leq x, s \leq 1$, sekä olkoon annettu funktio $g(x) \equiv 1$. Silloin yhtälö (3.42) saa muodon

$$(3.45) \quad f(x) - \lambda x \int_0^1 s f(s) ds = 1, \quad x \in [0, 1]$$

Koska $\|K\|_\infty = \sup_{x,s \in [0,1]} |K(x, s)| = 1$, yhtälöllä on kiintopistelauseen nojalla ratkaisu ainakin kun $|\lambda| < 1$. Lisäksi kuten yllä, ratkaisun voi löytää iteroimalla kuvausta $h \mapsto Th = 1 + \lambda \int_0^1 xsh(s) ds$; iteroinnissa huomataan että ratkaisun voi kehittää potenssisarjana λ :n suhteen. Valitussa erikoistapauksessamme potenssisarjan voi jopa esittää suljetussa muodossa (Ylimääräinen HT: Määrää ko. sarja ja sen summa).

Toisaalta, tapauksessa $K(x, s) = xs$ yhtälön voi myös ratkaista suoraan: Havaitaan nimittäin, että jokainen (3.45):n ratkaisu on muotoa $f(x) = 1 + Cx$ jollakin vakiolla C (Miksi?). Sijoittamalla nähdään että (3.45):n kanssa on yhtäpitävää yhtälö

$$(3.46) \quad 1 + Cx - \lambda x \int_0^1 s(1 + Cs) ds = 1, \quad x \in [0, 1].$$

Integroinnin jälkeen (Tee se !) tämä identiteetti saa muodon $C - \lambda(1/2 + C/3) = 0$. Siten

$$C = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{3 - \lambda} \quad \text{ja} \quad f(x) = 1 + \frac{3\lambda x}{6 - 2\lambda}$$

Integraaliyhtälö siis ratkeaa aina kun $\lambda \neq 3$. Kun $\lambda = 3$ ratkaisua ei ole millään vakiolla C .

Ylläolevassa löysimme tasan yhden poikkeusarvon λ . Esimerkkiä muokkaamalla voit helposti löytää ytimiä, joilla on 2, 3 tai useampia poikkeusarvoja.

Kun seuraavassa luvussa olemme rakentaneet Hilbertavaruuksien perusteorian, tulemme osoittamaan vielä enemmän:

3.47. Esimerkki (ei luennoilla 2010). Olkoon

$$(3.48) \quad K(x, s) = \frac{1}{3 - e^{2\pi i(x-s)}}, \quad x, s \in [0, 1]$$

[Huom: Eulerin identiteettiä $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ käyttäen yo. ytimen voi kirjoittaa myös trigonometristen funktioiden avulla.]

Tällöin: Jos $\lambda \neq 3^n$, $n = 1, 2, \dots$, yhtälö (3.42) ratkeaa kaikilla $g \in C(0, 1)$. Toisaalta, jos $\lambda = 3^n$ jollakin n , ei ratkaisua kaikilla funktioilla g löydy!

Väitteen todistus seuraa nopeasti Fourier-sarjojen ominaisuuksista, ja jätämme sen siksi lukuun 4. Huomaa, että tässäkin esimerkissä poikkeusarvojen joukko jää diskreetiksi.

Katsotaan lopuksi vielä yksi (hyvin!) erilainen esimerkki Banachin kiintopistelauseen soveltamisesta; tämä esimerkin luonne on yleissivistävä, eikä kuulu varsinaiseen kurssisisältöön; sivuutamme siksi osan todistuksen yksityiskohdista.

Muistetaan aluksi, että Banachin kiintopistelause on yleispätevä periaate, jota voidaan käyttää myös täydellisissä metrisissä avaruuksissa (oleellisesti samalla todistuksella). Konstruoidaan nyt sen avulla Kochin lumihuutalekäyrä!

3.49. Esimerkki. Olkoon $\mathcal{X} = \{ A \subset \mathbb{R}^2 : A \text{ kompakti}^4 \text{ osajoukko, } A \neq \emptyset \}$. Jos $A, B \in \mathcal{X}$, asetamme

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} \text{dist}(x, B), \sup_{y \in B} \text{dist}(y, A)\right\},$$

missä etäisyys $\text{dist}(x, B)$ pisteestä x joukkoon A määritellään kaavalla

$$\text{dist}(x, B) = \inf\{\|x - b\| : b \in B\},$$

ja $\|\cdot\|$ on euklidinen normi tasossa \mathbb{R}^2 . Tällöin voidaan osoittaa, että d_H on *metriikka* joukkoperheessä \mathcal{X} (tätä metriikkaa kutsutaan *Hausdorffin metriikaksi*).

Lisäksi (\mathcal{X}, d_H) on *täydellinen* (tämä perustuu kompaktisuuteen, sivuutetaan yksityiskohdat; HT). Olkoot $f_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $1 \leq j \leq n$, annettuja aitoja kontraktioita ja $k_j < 1$ vastaavat kontraktiovakiot. Tällöin

$$(*) \quad k = \max_{j=1, \dots, n} k_j < 1,$$

jolloin siis $\|f_j(x) - f_j(y)\| \leq k\|x - y\|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^2$ ja $j = 1, 2, \dots, n$. Asetetaan

$$\Phi(A) = \bigcup_{j=1}^n f_j(A),$$

kun $A \in \mathcal{X}$, eli kun $A \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti osajoukko. Koska kompaktien joukkojen äärellinen yhdiste on kompakti (Topologia I) on

$$\Phi(A) = \bigcup_{j=1}^n f_j(A)$$

on kompakti kaikilla $A \in \mathcal{X}$. Siis Φ on kuvaus $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$.

⁴Heine-Borelin lause: $A \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti $\Leftrightarrow A$ on suljettu ja rajoitettu

Väite. Φ on aito kontraktio $(\mathcal{X}, d_H) \rightarrow (\mathcal{X}, d_H)$

Todistus. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^2$ kompakteja. Jos

$$z \in \Phi(A) = \bigcup_{j=1}^n f_j(A),$$

niin $z = f_l(x)$ joillakin $x \in A$ ja $l \in \{1, \dots, n\}$. Olkoon $y \in B$ mielivaltainen. Tällöin $f_l(y) \in f_l(B) \subset \Phi(B)$, joten

$$\text{dist}(z, \Phi(B)) \leq \|f_l(x) - f_l(y)\| \leq k\|x - y\|,$$

missä $k < 1$ ehdon (*) nojalla. Siis ottamalla infimum pisteen $y \in B$ suhteen saadaan, että

$$\text{dist}(z, \Phi(B)) \leq k \text{dist}(x, B).$$

Koska $z \in \Phi(A)$ on mielivaltainen, niin

$$\sup_{z \in \Phi(A)} \text{dist}(z, \Phi(B)) \leq k \sup_{x \in A} \text{dist}(x, B) \leq k d_H(A, B).$$

Symmetrian perusteella pätee samoin

$$\sup_{z \in \Phi(B)} \text{dist}(z, \Phi(A)) \leq k \sup_{y \in B} \text{dist}(y, A) \leq k d_H(A, B).$$

Siispä

$$d_H(\Phi(A), \Phi(B)) \leq k d_H(A, B)$$

kun $A, B \in \mathcal{X}$, joten kuvaus Φ on aito kontraktio. □

Nyt Banachin kiintopistelauseen metrisen version nojalla kuvauksella Φ on yksikäsitteinen kiintopiste $A \in \mathcal{X}$, eli on olemassa kompakti osajoukko $A \subset \mathbb{R}^2$, jolle

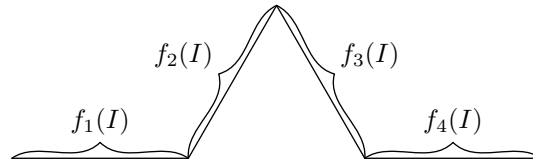
$$A = \Phi(A) = \bigcup_{j=1}^n f_j(A).$$

Lisäksi $A = \lim_n \Phi^n(B)$, missä suppeneminen tapahtuu metriikan d_H suhteen: $d_H(A, \Phi^n(B)) \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$ lähtien mistä tahansa joukosta $B \in \mathcal{X}$.

Valitaan edellä esimerkiksi kontraktiot f_j *similariteeteiksi*, eli

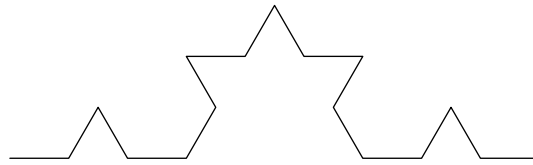
$$f_j(x) = r_j O_j(x) + b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

missä $0 < r_j < 1$, $b_j \in \mathbb{R}^2$ ja $O_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jokin tason kierto origon ympäri. Tällöin saadaan kauniita esimerkkejä ”fraktaaleista” joukoista. Valitaan vaikkapa similaariteetit $f_1, \dots, f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ siten, että ne kuvaavat yksikköjanan $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ kuten seuraavassa kuvassa.



Nämä similariteetit määräävät kuvauksen Φ kuten yllä. Mikä on tällöin vastaava (yksikäsitteinen) invariantti joukko A , jolle $\Phi(A) = A$?!

Banachin kiintopistelauseen todistuksesta tiedämme, että kiintopiste A saadaan iteroimalla kuvausta Φ (esim. lähtien joukosta $I \in \mathcal{X}$). Nyt $\Phi^2(I) = \Phi(\Phi(I))$ näyttää tältä:



Rajalla $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(I)$ saa seuraavan muodon (Kochin lumihiihtalekäyrä):

tähän tulee kuva!!

Edellä oleva Banachin kiintopistelauseen sovellus on peräisin J. E. Hutchinsonilta vuodelta 1981.

Harjoitustehtäviä

3:1 Olkoon E, F Banachin avaruuksia, ja $T : E \rightarrow F$ sellainen jatkuva lineaarinen kuvaus, että $\|Tx\| \geq c\|x\|$ kaikilla $x \in E$ jollakin $c > 0$. Näytä, että T on injektio ja että kuvajoukko $T(E) = \{Tx : x \in E\}$ on F :n suljettu vektoriavaruus. [Apu: voit tarkistaa, että $T(E)$ on täydellinen.]

3:2 Kiinnitetään $0 < \alpha < 1$ ja olkoon Lip_α sellaisten funktioiden $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ joukko, joille

$$\|f\|_\alpha = |f(0)| + \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^\alpha} < \infty.$$

Näytä aluksi, että Lip_α on vektoriavaruus ja että $\|\cdot\|_\alpha$ on normi. Osoita sen jälkeen, että $(Lip_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ on Banachin avaruus. (Huomaa että

$$|f(s) - f(t)| \leq \|f\|_\alpha \cdot |s - t|^\alpha \text{ kaikilla } s, t \in [0, 1], f \in Lip_\alpha.$$

Sanotaan usein, että f on Hölder-jatkuva potensilla α , tai kertaluvun α Lipschitz-funktioksi.)

3:3. Suppeneeko (funktio)sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n}$ Banachin avaruudessa $C(0, 1)$? Entä suppeneeko kyseinen sarja absoluuttisesti avaruudessa $C(0, 1)$? [Edellä

sarjan n :s termi on siis funktio $t \mapsto (-1)^n \frac{t^n}{n}$. Muista Analyysi II:sta vuorottelevat sarjat ja Leibniz'in lause.]

3:4. Olkoon $c_{00} = \{x = (x_n) : x_n \neq 0 \text{ äärellisen monella } n \in \mathbb{N}\}$ varustettuna sup-normilla $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. Etsi sellainen vektorisarja $\sum_n y_n$, että $\sum_n y_n$ ei suppene avaruudessa c_{00} , mutta $\sum_n \|y_n\|_\infty < \infty$.

3:5. Olkoon E epätäydellinen normiavaruus. Konstruoi sellainen avaruuden E absoluuttisesti suppeneva sarja $\sum_n x_n$, että sarja $\sum_n x_n$ ei suppene E :ssa. [Vihje: Idea on näkyvässä Lauseen 3.23 todistuksessa.]

3:6. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Todista L^p -avaruuksien Minkowskin epäyhtälö:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad f, g \in L^p(\Omega).$$

[Tapauksessa $1 < p < \infty$ imitoi Lauseen 2.22 todistusta ja käytä Hölderin epäyhtälöä L^p -avaruuksissa. Tapaus $p = 1$ on suoraviivaisempi.]

3:7. Asetetaan $\phi(f) = \int_0^1 s^{-1/4} f(s) ds$ kaikilla $f \in L^2(0, 1)$. Näytä, että ϕ on jatkuva lineaarinen kuvaus $L^2(0, 1) \rightarrow \mathbb{K}$. [Muistutus: Hölderin epäyhtälö L^p -avaruuksissa.]

3:8. (i) Osoita, että

$$\sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = \text{ess sup}_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

kaikilla jatkuvilla (reaaliarvoisilla) kuvauksilla $f \in C(0, 1)$. Päättele, että $C(0, 1) \subset L^\infty(0, 1)$ on suljettu (vektori)aliavaruus.

(ii) Näytä, että inklusio $C(0, 1) \subset L^\infty(0, 1)$ on aito tutkimalla esimerkiksi välin $I = [0, 1/2]$ karakteristista funktiota χ_I . [Muista, että avaruudessa $L^\infty(0, 1)$ samaistetaan sellaiset funktiot, jotka poikkeavat toisistaan nolla-mittaisessa joukossa.]

3:9. Olkoon E Banachin avaruus, ja $M \subset E$ suljettu vektorialiavaruus.

(i) Tarkista, että tekijäavaruuden E/M laskutoimitukset $(x + M) + (y + M) = (x + y) + M$ ja $\lambda(x + M) = \lambda x + M$ kun $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbf{K}$ eivät riipu edustajien x, y valinnoista. [Muista. $x + M = y + M$ jos ja vain jos $x - y \in M$.]

(ii) Näytä, että $\|x + M\| = \inf\{\|x - m\| : m \in M\}$ määrittelee normin tekijäavaruuteen E/M , jolle $\|x + M\| \leq \|x\|$ kaikilla $x \in E$.

3:10. Osoita, että tehtävässä 3:9 määritelty normiavaruus $(E/M, \|\cdot\|)$ on Banachin avaruus. [Idea. On osoitettava, että jokainen avaruuden E/M absoluuttisesti suppeneva sarja $\sum_n \|x_n + M\| < \infty$ todella suppenee tekijäavaruudessa E/M . Määritelmän nojalla jokaisella $n \in \mathbf{N}$ löytyy sellainen edustaja

$y_n \in x_n + M$, että $\|y_n\| \leq 2\|x_n + M\|$. Tällöin sarja $\sum_n y_n$ suppenee E :ssä oletuksen nojalla. Näytä että $y + M = \sum_n (x_n + M)$, missä $y = \sum_n y_n$.]

3:11. Määritellään kuvaus $f : B_{\ell^2} \rightarrow \ell^2$ asettamalla

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}(1 - \|x\|_2), x_1, x_2, \dots \right), \quad \text{kun } x = (x_k) \in B_{\ell^2},$$

missä $B_{\ell^2} = \{x = (x_k) \in \ell^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ on avaruuden ℓ^2 suljettu yksikköpallo. Näytä: (i) $f(B_{\ell^2}) \subset B_{\ell^2}$, (ii) $\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \frac{\sqrt{5}}{2}\|x - y\|_2$ kaikilla $x, y \in B_{\ell^2}$, (iii) ei ole olemassa sellaista jonoa $x \in B_{\ell^2}$, että $f(x) = x$.

3:12. Määritellään kuvaus $T : c_0 \rightarrow c_0$ kaavalla

$$T(x) = (1 - \|x\|_\infty, x_1, x_2, \dots), \quad x = (x_k) \in c_0.$$

Osoita, että T on kontraktio $B_{c_0} \rightarrow B_{c_0}$, jolla ei ole kiintopistettä $x = (x_k) \in B_{c_0}$.

3:13. Näytä kiintopistelauseen avulla, että integraaliyhtälöllä

$$4f(x) - \int_0^1 f(s)^2 ds = x, \quad x \in [0, 1],$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $f \in B_{C(0,1)} = \{f \in C(0,1) : \|f\|_\infty \leq 1\}$.

3:14. Olkoon E Banachin avaruus, $D \subset E$ suljettu osajoukko sekä $T : D \rightarrow D$ kuvaus. Osoita: jos $T^n = T \circ \dots \circ T$ (n kpl) on aito kontraktio jollakin $n \geq 2$, niin kuvauksella T on yksikäsitteinen kiintopiste. [Ohje: Banachin kiintopistelauseen nojalla kuvauksella T^n on yksikäsitteinen kiintopiste $x \in D$. Näytä, että $T^{n-1}(x)$ on silloin T :n kiintopiste.]

3:15. Olkoon E Banachin avaruus, $U \subset E$ avoin joukko ja $g : U \rightarrow E$ aito kontraktio. Asetetaan $f(x) = x - g(x)$, $x \in U$. Osoita, että $f(U)$ on avoin joukko E :ssä. [Juonikuvio: Olkoon $c < 1$ kuvauksen g kontraktiovakio, $z \in U$ mielivaltainen ja $r > 0$ sellainen säde, että $\overline{B}(z, r) \subset U$. Näytä, että (avoin) pallo $B(f(z), (1 - c)r) \subset f(U)$ kiinnittämällä $y_0 \in B(f(z), (1 - c)r)$ ja soveltamalla Banachin kiintopistelausetta kuvaukseen $\phi(x) = x - (f(x) - y_0) = g(x) + y_0$.]

3:16. Olkoon $T : C(0,1) \rightarrow C(0,1)$ lineaarikuvaus $(Tf)(t) = tf(t)$, kun $t \in [0, 1]$ ja $f \in C(0,1)$. Näytä, että $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ kaikilla $f \in C(0,1)$, eli T on kontraktio. Olkoon

$$A = \{f \in C(0,1) : f(0) = 0, f(1) = 1, 0 \leq f(t) \leq 1 \text{ kaikilla } t \in [0, 1]\}.$$

Tarkista, että $A \subset C(0,1)$ on suljettu konvekssi joukko ja $T(A) \subset A$. Näytä, ettei kuvauksella T ole kiintopistettä joukossa A .

4. HILBERTIN AVARUUDET

Hilbertin avaruudet ovat ääretönulotteisista normiavaruuksista ominaisuuksiltaan kaikkein lähinnä ”kotiavaruutta” \mathbb{R}^n tai \mathbb{C}^n . Tästä syystä niiden teoria on joustava ja käyttökelpoinen monessa tilanteessa. Hilbertin avaruuden normi määräytyy *sisätulosta*.

4.1. Määritelmä. Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on \mathbb{K} . Kuvaus $f: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ on *Hermiten muoto*, jos

- (i) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$ kaikilla $x_1, x_2, y \in E$,
- (ii) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ kaikilla $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$
- (iii) $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$ kaikilla $x, y \in E$. (Tässä $\bar{z} = a - ib$ on kompleksiluvun $z = a + ib \in \mathbb{C}$ konjugaattiluku.)

Huomautus. (1) Jos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, niin ehto (iii) on muotoa $f(y, x) = f(x, y)$ kaikilla $x, y \in E$.

(2) Suoraan laskemalla nähdään, että

$$f(x, y_1 + y_2) = \overline{f(y_1 + y_2, x)} \stackrel{(i)}{=} \overline{f(y_1, x) + f(y_2, x)} = \overline{f(y_1, x)} + \overline{f(y_2, x)} = f(x, y_1) + f(x, y_2)$$

ja

$$f(x, \lambda y) = \overline{f(\lambda y, x)} \stackrel{(ii)}{=} \overline{\lambda f(y, x)} = \bar{\lambda} \overline{f(y, x)} = \bar{\lambda} f(x, y)$$

kaikilla $x, y_1, y_2 \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Hermiten muoto f on siis *konjugaattilineaarinen* jälkimmäisen muuttujan suhteen.

(3) Nolla-alkion tapauksessa $f(\bar{0}, y) = 0 = f(x, \bar{0})$ kun $x, y \in E$, sillä $2f(\bar{0}, y) = f(2 \cdot \bar{0}, y) = f(\bar{0}, y)$.

Hermiten muoto $f: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ on *sisätulo* (tai skalaaritulo) avaruudessa E , jos f on lisäksi *aidosti positiivinen* eli

$$f(x, x) \geq 0 \text{ kaikilla } x \in E, \text{ sekä } f(x, x) = 0 \text{ jos ja vain jos } x = \bar{0}.$$

Sisätulon tapauksessa merkitsemme:

$$(x | y) = f(x, y), \quad x, y \in E,$$

$$\|x\| = \sqrt{(x | x)}, \quad x \in E.$$

Vektoriavaruus E on *sisätuloavaruus*, jos E on varustettu sisätulolla $(\cdot | \cdot)$. Joskus käytämme sisätulolle myös merkintää (x, y) . (Kirjallisuudesta löytyy lisäksi useita muita merkintöjä: $\langle x, y \rangle$, $\langle x | y \rangle$ yms.)

Seuraava keskeinen arvio tarvitaan sen osoittamiseksi, että $\|\cdot\|$ todella on normi sisätuloavaruudessa E .

4.2. **Lause** (Cauchy–Schwarzin epäyhtälö). *Sisätuloavaruudessa E pätee*

$$(CS) \quad |(x|y)| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{kaikilla } x, y \in E.$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $x \neq \bar{0}$, $y \neq \bar{0}$ (muuten (CS) on ilmeinen). Jokaisella $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee

$$\begin{aligned} 0 \leq (x + \lambda y | x + \lambda y) &\stackrel{(i)-(iii)}{=} (x|x) + \lambda(y|x) + \bar{\lambda}(x|y) + \underbrace{\lambda\bar{\lambda}}_{=|\lambda|^2}(y|y) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \|x\|^2 + \lambda\overline{(x|y)} + \bar{\lambda}(x|y) + |\lambda|^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Valitaan $\lambda = -\frac{(x|y)}{\|y\|^2}$. (On hyvä huomata, että tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tämä on polynomin $\lambda \mapsto \|x\|^2 + 2\lambda(x|y) + \lambda^2\|y\|^2$ minimikohta!) Tällä valinnalla edellisestä epäyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x\|^2 - \frac{2|(x|y)|^2}{\|y\|^2} + \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 &= \|x\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} \\ \iff |(x|y)|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2, \end{aligned}$$

mikä osoittaa väitteen. □

4.3. **Seuraus.** *Kuvaus $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$, $x \in E$, on sisätuloavaruuden E normi.*

Todistus. Kolmioepäyhtälö on todistuksen varsinainen epätriviaali kohta. Suoraan laskemalla ja käyttämällä identiteettiä $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ luvuille $z \in \mathbb{C}$, saadaan

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x + y\|^2 &= (x + y | x + y) \stackrel{(i)-(iii)}{=} \|x\|^2 + (x|y) + (y|x) + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + (x|y) + \overline{(x|y)} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Koska kompleksiluvuille $z \in \mathbb{C}$ pätee aina $\operatorname{Re} z \leq |z|$, niin edellisen epäyhtälön ja Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2|(x|y)| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{(CS)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Ottamalla neliöjuuri saadaan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, kun $x, y \in E$.

Edelleen, kun $x \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, on selvästi voimassa

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}(x|x)} = \sqrt{|\lambda|^2\|x\|^2} = |\lambda|\|x\|.$$

Myös ehto (N3) toteutuu, sillä $\|x\| = \sqrt{(x|x)} = 0$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$, sillä $(\cdot|\cdot)$ on sisätulo. □

4.4. **Määritelmä.** Sanomme, että täydellinen sisätuloavaruus $(E, (\cdot | \cdot))$ on *Hilbertin avaruus*.

Hilbertin avaruuden nimitys tulee David Hilbertin (1862–1943) mukaan.

4.5. **Esimerkki.**

(1) Jos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ja $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, niin kuvaus

$$(x | y) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

on vektoriavaruuden \mathbb{K}^n sisätulo. Vastaava normi

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x | x)} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

on avaruuden \mathbb{K}^n tavallinen euklidinen normi ja $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ on Hilbertin avaruus. Merkitään usein $\ell_2^n = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, $n = 1, 2, \dots$

(2) Jonoavaruudessa ℓ^2 määritellään sisätulo kaavalla

$$(*) \quad (x | y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j, \text{ kun } x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2.$$

Huomaa, että jonoavaruuksien Hölderin epäyhtälön 2.20 (tai Schwarzin epäyhtälön 2.21) nojalla

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \bar{y}_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \text{ kun } (x_k), (y_k) \in \ell^2,$$

joten sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ suppenee (jopa itseisesti) \mathbb{K} :ssa, ja $(*)$ on näin mielekäs.

Sisätulon määräämä normi on tässä

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ kun } x = (x_k) \in \ell^2,$$

eli avaruuden ℓ^2 tavallinen normi, jonka suhteen ℓ^2 on täydellinen (Lause 3.24 sivulla 41). Siis $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ on Hilbertin avaruus, eli ääretönulotteinen versio avaruuksista $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.

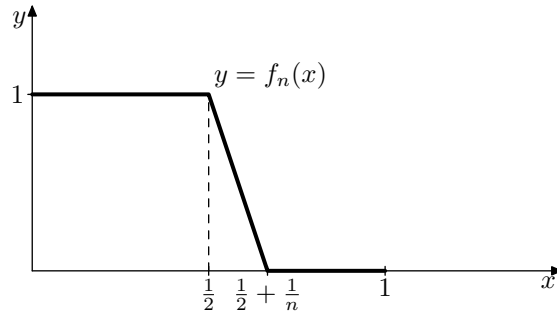
(3) Jos avaruus $C(0, 1) = \{ f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ jatkuva} \}$ varustetaan sisätulolla

$$(f | g) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in C(0, 1),$$

niin $(C(0, 1), \|\cdot\|_2)$ ei ole Hilbertin avaruus, missä

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

sillä $(C(0, 1), \|\cdot\|_2)$ ei ole täydellinen. Perusteluksi tarkastele seuraava kuvaa ja pohdi, mitä tapahtuu, kun $n \rightarrow \infty$ (vapaa HT).



KUVA 4. Jatkuva funktio f_n , joka approksimoi epäjatkovaa funktiota $\|\cdot\|_2$ -normissa

(4) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen joukko, ja μ n -ulotteinen Lebesgue mitta. Tällöin avaruus $L^2(\Omega)$ varustettuna sisätulolla

$$(4.6) \quad (f | g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} d\mu(x), \quad f, g \in L^2(\Omega),$$

on Hilbertin avaruus (normissa $\|f\|_2 = (\int_{\Omega} |f(x)|^2 d\mu(x))^{1/2}$, vrt. Lause 3.32 sivulla 47.) Huomaa myös että tulofunktio $x \mapsto f(x) \overline{g(x)}$ on integroitava ja (4.6) on siis hyvin määritelty kun $f, g \in L^2(\Omega)$; tämä seuraa integraalien Hölderin epäyhtälöstä (Lemma 3.26 sivulla 44).

Kun verrataan kahta viimeistä esimerkkiä, käy ilmi, että vektorialiavaruus $C(0, 1)$ on tiheä avaruudessa $(L^2(0, 1), \|\cdot\|_2)$ ja siten $L^2(0, 1)$ on vektorivaruuden $C(0, 1)$ täydentymä $\|\cdot\|_2$ -normin suhteen. Tämä osoitetaan myöhemmin kurssin aikana (kts. Lause 5.5 luvussa 5).

Alamme sitten setvimään Hilbertin avaruuksien ominaisuuksia. Havaitaan, että (geo)metrisesti ne toimivat kuten kotiavaruus \mathbb{K}^n . Emme kuitenkaan voi vedota äärellisulotteisiin ilmiöihin, mutta esimerkiksi kahden annetun vektorin välinen kulma on järkevä reaaliosassa Hilbertin avaruudessa:

Jos $x, y \neq \bar{0}$ ovat \mathbb{R} -kertoimisen Hilbertin avaruuden E alkioita, niin määrittellemme niiden välisen kulman $\varphi \in [0, 2\pi)$ tutulla kaavalla

$$(x | y) = \|x\| \|y\| \cos \varphi.$$

Olkoon esimerkiksi $x = (2^{-n})_{n=1}^{\infty}$ ja $y = (3^{-n})_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$. Tällöin (geometrisen sarjan summina)

$$(x | y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} 6^{-n} = 1/5,$$

ja $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_n (2^{-n})^2} = 1/\sqrt{3}$ sekä vastaavasti $\|y\|_2 = 1/\sqrt{8}$. Näin ollen

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{24}}{5} \Rightarrow \varphi \sim 11^\circ.$$

Funktioiden välisiä kulmia pohdittaessa kaikkein helpoin on tilanne, jossa vektorit ovat kohtisuorassa. Tämä on sisätuloavaruuksille varsin keskeinen käsite:

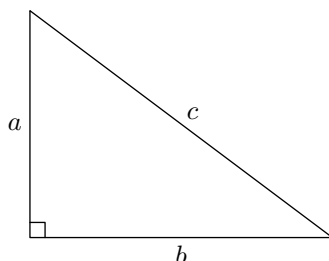
4.7. Määritelmä. Sisätuloavaruuden E vektorit $x, y \in E$ ovat *ortogonaaliset* (eli *kohtisuorat*), jos $(x|y) = 0$. Ortogonaalisuutta merkitään $x \perp y$. Osajoukot $A, B \subset E$ ovat *ortogonaaliset*, merkitään $A \perp B$, jos $x \perp y$ kaikilla $x \in A$ ja $y \in B$.

Ortogonaalisten vektorien summilla on seuraava tuttu ominaisuus. Hilbertin avaruuksien hajotelmia konstruoitaessa sillä tulee olemaan keskeinen rooli.

4.8. Lause (Pythagoras). *Olkoon E sisätuloavaruus. Jos $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ ja vektorit ovat keskenään ortogonaaliset eli $x_j \perp x_k$, kun $j \neq k$, niin*

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Huomautus. Kun kolmiossa $a = \|x\|$ ja $b = \|y\|$, niin $c = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$, joten tapaus $n = 2$ on alkeisgeometriasta tuttu lause $a^2 + b^2 = c^2$.



Todistus. Väite osoitetaan induktiolla muuttujan n suhteen. Jos $n = 2$ ja $x_1 \perp x_2$ niin,

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2\|^2 &= (x_1 + x_2 | x_1 + x_2) = \|x_1\|^2 + (x_1 | x_2) + (x_2 | x_1) + \|x_2\|^2 \\ &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2. \end{aligned}$$

Oletetaan, että väite on osoitettu, kun $n = k$. Tällöin kohdan $n = 2$ ja induktiooletuksen nojalla on voimassa

$$\begin{aligned} \|x_1 + \dots + x_k + x_{k+1}\|^2 &= \|x_1 + \dots + x_k\|^2 + \|x_{k+1}\|^2 \\ &\stackrel{\text{ind.ol.}}{=} \|x_1\|^2 + \dots + \|x_k\|^2 + \|x_{k+1}\|^2, \end{aligned}$$

Ensimmäinen yhtäsuuruus on voimassa, sillä oletuksen nojalla

$$(x_1 + \dots + x_k | x_{k+1}) \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{j=1}^k (x_j | x_{k+1}) = 0,$$

eli $(x_1 + \dots + x_k) \perp x_{k+1}$. □

Tilanteissa, joissa avaruuden vektoripari ei ole kohtisuorassa, voimme korvata Pythagoraan suunnikasyhtälöllä. (Piirrä ao. lauseesta esimerkkikuva!)

4.9. Lause (Suunnikasyhtälö). *Jos E on sisätuloavaruus ja $x, y \in E$, niin*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Todistus. Lasketaan suoraan: sisätulon ominaisuuksista seuraa, että

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y | x + y) + (x - y | x - y) \\ &= (x | x) + (x | y) + (y | x) + (y | y) \\ &\quad + (x | x) - (x | y) - (y | x) + (y | y) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

□

Suunnikasyhtälön avulla voidaan helposti tarkistaa, että monet konkreettiset Banachin avaruudet *eivät* ole Hilbertin avaruuksia (eli avaruuden normi *ei* voi tulla sisätulosta).

4.10. Esimerkki. $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ja $(C(0, 1), \|\cdot\|_\infty)$ eivät ole Hilbertin avaruuksia.

Ratkaisu: Olkoon $x = (1, 0, 0, \dots)$, $y = (0, 1, 0, \dots) \in \ell^1$. Tällöin

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= \|(1, 1, 0, \dots)\|_1 = 2, \\ \|x - y\|_1 &= \|(1, -1, 0, \dots)\|_1 = 2, \\ \|x\|_1 &= \|y\|_1 = 1, \end{aligned}$$

joten

$$\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \neq 4 = 2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2).$$

Siispä $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ei ole Hilbertin avaruus.

Olkoon nyt $f, g \in C(0, 1)$ kuvaukset $f(t) = t$ ja $g(t) = 1 - t$ kun $t \in [0, 1]$. Tällöin selvästi $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$. Koska $(f + g)(t) = 1$ ja $(f - g)(t) = 2t - 1$ kun $t \in [0, 1]$, niin $\|f + g\|_\infty = \|f - g\|_\infty = 1$. Siis

$$\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2),$$

eli $(C(0, 1), \|\cdot\|_\infty)$ ei myöskään ole sisätuloavaruus. □

Huomautus. (1) Samoin $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ja $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ eivät ole Hilbertin avaruuksia kun $p \neq 2$. (HT 4:4)

(2) [Lisätieto] Itse asiassa suunnikasyhtälö (Lause 4.9) karakterisoi sisätuloavaruudet: jos E on sellainen normiavaruus, että

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \text{kaikilla } x, y \in E,$$

niin E :n normi $\|\cdot\|$ on peräisin sisätulosta. Polarisaatiokaava (HT 4:2) kertoo miten sisätulon $(\cdot|\cdot)$ tulee määritellä, mutta sisätulon ominaisuuksien verifiointi suunnikasyhtälöstä lähtien vaatii jonkin verran työtä. (Tämä on ns. Jordan- von Neumannin lause, katso esimerkiksi sivu 8 kirjasta D. Amir: *Characterizations of inner product spaces* (1986)).

Seuraava käsite on keskeinen Hilbertin avaruuksissa.

4.11. Määritelmä. Jos $A \subset E$, niin joukon A ortokomplementti A^\perp on joukko

$$A^\perp := \{y \in E : (x|y) = 0 \text{ kaikilla } x \in A\}.$$

Ortokomplementin ominaisuuksia varten tarvitsemme seuraavan aputuloksen.

4.12. Lause. *Sisätulon ehto* $(x, y) \mapsto (x|y)$ määrää jatkuvan kuvauksen $E \times E \rightarrow \mathbb{K}$.

Todistus. Jos $x_0 \in E$ ja $y_0 \in E$, niin kolmioepäyhtälön ja Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla, sekä kehittämällä auki $(x|y) = (x - x_0 + x_0|y - y_0 + y_0)$ saadaan

$$\begin{aligned} |(x|y) - (x_0|y_0)| &= |(x - x_0|y - y_0) + (x - x_0|y_0) + (x_0|y - y_0)| \\ &\leq \|x - x_0\| \|y - y_0\| + \|x_0 - x\| \|y_0\| + \|x_0\| \|y - y_0\|, \end{aligned}$$

missä oikea puoli $\rightarrow 0$, kun $x \rightarrow x_0$ ja $y \rightarrow y_0$. □

Käy ilmi, että monimutkaisenkkin osajoukon A ortokomplementti on hyvin säännöllinen:

4.13. Lause. *Jos* $A \subset E$, *niin sen ortokomplementti* A^\perp *on avaruuden* E *suljettu aliavaruus.*

Todistus. Joukko A^\perp on avaruuden E aliavaruus: Jos $y_1, y_2 \in A^\perp$ ja $a, b \in \mathbb{K}$, niin

$$(x|ay_1 + by_2) = \bar{a}(x|y_1) + \bar{b}(x|y_2) = 0 + 0 = 0$$

kaikilla $x \in A$, joten $ay_1 + by_2 \in A^\perp$. Siispä A^\perp on aliavaruus.

Seuraavaksi huomataan, että jos $x \in E$ on kiinteä vektori, niin

$$x^\perp \equiv \{x\}^\perp = \{y \in E : (x|y) = 0\}$$

on jatkuvan funktion $y \mapsto (x | y)$ alkukuva nollasta. Siispä joukko x^\perp on suljettu. Näin ollen mielivaltaisella $A \subset E$,

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} x^\perp$$

on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu. \square

Huomautus. (a) Nolla-alkion $\bar{0}$ ortokomplementti on E eli $\{\bar{0}\}^\perp = E$.

(b) Koko avaruuden E ortokomplementti on $\{\bar{0}\}$ eli $E^\perp = \{\bar{0}\}$. Nimittäin, jos $y \in E^\perp$, niin $(x | y) = 0$ kaikilla $x \in E$. Erityisesti $(y | y) = \|y\|^2 = 0$, joten $y = \bar{0}$.

(c) Sama päättely antaa: jos $y \in A \cap A^\perp$, niin $y = \bar{0}$.

Olemme itse asiassa verifioineet seuraavan hyödyllisen havainnon.

4.14. Lause. Jos $y_1, y_2 \in E$ ja $(x | y_1) = (x | y_2)$ kaikilla $x \in E$, niin $y_1 = y_2$.

Todistus. Koska $0 = (x | y_1 - y_2)$ kaikilla $x \in E$, niin $y_1 - y_2 \in E^\perp = \{\bar{0}\}$, eli $y_1 = y_2$. \square

Seuraavaksi alamme tarkastella minimointitehtäviä. Näillä on monia sovelluksia, esimerkiksi differentiaaliyhtälöistä aina käytännön prosessien optimointiin asti. Kun tilanteita mallinnetaan Hilbertin avaruuksilla tulee (usein) tehtäväksi selvittää, millä ehdoin joukoista löytyy normin minimoivia alkioita, ts. jos E on Hilbertin avaruus ja $A \subset E$ on osajoukko, niin milloin on olemassa sellainen $x_0 \in A$, että

$$\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in A\} ?$$

Koska avaruutemme ovat ääretönulotteisia, minimien olemassaolo ei ole ollenkaan selvää, kuten seuraava yksinkertainen esimerkki näyttää.

4.15. Esimerkki. Olkoon $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \ell^2$; siis jonon n :s termi = 1. Jos $A = \{ \frac{n+2}{n+1}e_n : n \in \mathbb{N} \}$, tällöin A on suljettu ja rajoitettu, koska $\| \frac{n+2}{n+1}e_n - \frac{m+2}{m+1}e_m \|^2 = (\frac{n+2}{n+1})^2 + (\frac{m+2}{m+1})^2 \geq 2$ kun $n \neq m$. Kuitenkaan ei löydy sellaista vektoria $x \in A$, jolle olisi

$$\|x\| = \inf\{\|y\| : y \in A\} = 1,$$

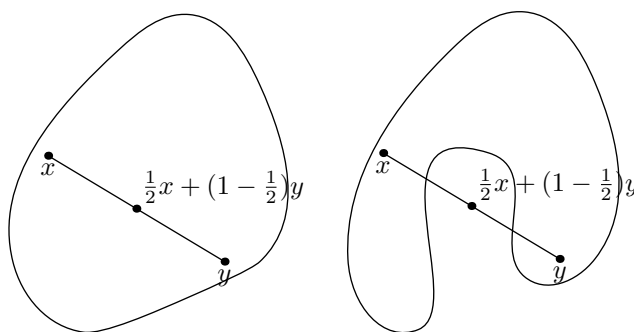
koska $\| \frac{n+2}{n+1}e_n \|_2 = \frac{n+2}{n+1} \rightarrow 1$ kun $n \rightarrow \infty$.

Joukkojen kompaktisuus tietysti takaisi minimoivien alkioiden olemassaolon, mutta ääretönulotteisissa avaruuksissa tämä oletus olisi aivan liian rajoittava. (Esimerkiksi suljettu yksikköpallo $B_{\ell^2} = \{x \in \ell^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ ei ole kompakti joukko, koska $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ kaikilla $n \neq m$, kun $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \ell^2$, missä 1 on n :ssa paikassa.) On itse asiassa yllättävää, että Hilbertin avaruuksissa minimointitehtävä ratkeaa suhteellisen yleisesti. Olennainen ominaisuus tällaisissa minimointitehtävissä on *konveksisuus*.

Muistetaan, että pisteiden x ja y välinen *yhdysjana* on joukko

$$\{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\} = \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}.$$

4.16. Määritelmä. Vektoriavaruuden E osajoukko A on *konvekssi*, jos pisteiden $x, y \in A$ välinen yhdysjana aina sisältyy joukkoon A eli jos $tx + (1 - t)y \in A$ aina, kun $x, y \in A$ ja $0 \leq t \leq 1$.



KUVA 5. Konvekssi joukko (vasemmalla) ja ei-konvekssi joukko (oikealla); Kuvassa myös pisteiden x ja y väliset yhdysjanat.

4.17. Esimerkki. Olkoon E normiavaruus. Tällöin avoimet pallot $B(a, r)$ ja suljetut pallot $\bar{B}(a, r)$ ovat konvekseja joukkoja kaikilla $a \in E$ ja $r > 0$. Nimitetään, jos $y_1, y_2 \in B(a, r)$ ja $0 < t < 1$, niin

$$\|ty_1 + (1-t)y_2 - a\| = \|t(y_1 - a) + (1-t)(y_2 - a)\| \leq t\|y_1 - a\| + (1-t)\|y_2 - a\| < r.$$

Tapaus $\bar{B}(a, r)$ samoin.

4.18. Lause. Jos F on Hilbertin avaruuden E konvekssi suljettu osajoukko, niin on olemassa täsmälleen yksi normin minimoiva alkio $x_0 \in F$, eli alkio $x_0 \in F$ joka toteuttaa ehdon

$$\|x_0\| \leq \|x\| \text{ kaikilla } x \in F.$$

Toisin sanoen, $\|x_0\| = \inf \{\|x\| : x \in F\} = \text{dist}(\bar{0}, F)$.

Todistus. Olkoon $\delta = \inf \{ \|x\| : x \in F \}$. Sovelletaan suunnikasyhtälöä (4.9) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ vektoreihin $u = \frac{1}{2}x$, $v = \frac{1}{2}y$, kun $x, y \in F$. Tästä seuraa, että

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2.$$

Koska konveksisuuden nojalla $\frac{1}{2}(x+y) \in F$, niin

$$(*) \quad \|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2.$$

Jos nyt $\|x\| = \|y\| = \delta$, niin arvion (*) nojalla $\|x-y\|^2 \leq 0$, joten $x = y$. Siis normin minimoiva alkio on ainakin yksikäsitteinen, jos se on olemassa.

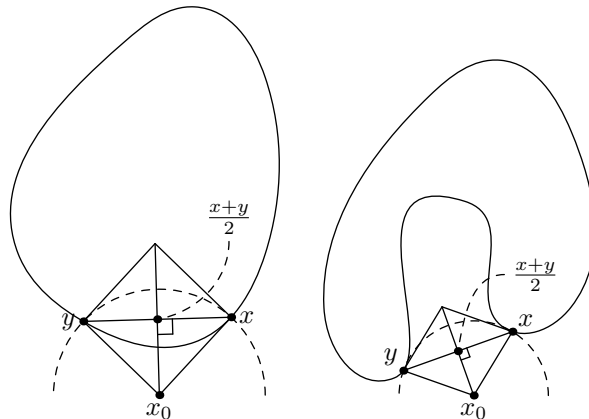
Olemassaoloa varten valitaan sellainen jono $(x_n)_{n=1}^\infty \subset F$, että $\|x_n\| \rightarrow \delta$, kun $n \rightarrow \infty$. Korvataan x ja y arviossa (*) jonon alkioilla x_n ja x_m , josta

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\delta^2,$$

koska $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in F$ kaikilla n, m . Silloin $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$, kun $n, m \rightarrow \infty$. Siispä $(x_n)_{n=1}^\infty$ on Cauchyn jono Hilbertin avaruudessa E , joten on olemassa $x_0 \in E$ jolle $x_n \rightarrow x_0 \in E$, kun $n \rightarrow \infty$. Koska normi $\|\cdot\|$ on jatkuva funktio, niin

$$\|x_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \delta.$$

Koska F on suljettu ja $(x_n)_{n=1}^\infty \subset F$, niin raja-alkio $x_0 \in F$. □



KUVA 6. Minimointiongelman yksikäsitteisyyden geometrinen ajatus konveksille joukolle (vasemmalla) ja ei-konveksille joukolle (oikealla)

Edellinen lause voidaan muotoilla myös invariantisti, niin ettei origolla ole erikoisasemaa.

4.19. **Seuraus.** Olkoon E Hilbertin avaruus, F sen suljettu konvekksi osajoukko sekä $x \in E$. Silloin on täsmälleen yksi alkio $y_0 \in F$, jolle

$$\|x - y_0\| = \text{dist}(x, F).$$

Tässä $\text{dist}(x, F) = \inf\{\|x - y\| : y \in F\}$ on x :n etäisyys F :stä.

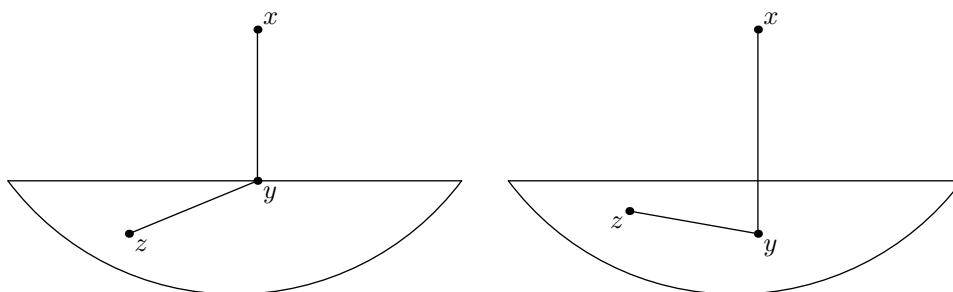
Todistus. Joukko $x - F$ on suljettu ja konvekksi (tarkista!), sekä

$$\min\{\|x - y\| : x - y \in x - F\} = \min\{\|x - y\| : y \in F\}.$$

Nyt väite seuraa suoraan Lauseesta 4.18. □

Yo. lauseilla on suoraan sovelluksia konveksissa optimoinnissa, mutta niitä voidaan käyttää monissa muissakin minimointitehtävissä, esim. variaatiolaskennassa.

Olemme todistaneet minimoivan alkion y_0 olemassaolon ja yksikäsitteisyyden, mutta se voidaan myös helposti tunnistaa! Seuraava lause kertoo, että $\|x - y_0\| = \text{dist}(x, F)$ jos ja vain jos vektoreiden $x - y_0$ ja $z - y_0$ välinen kulma on tylppä kaikilla $z \in F$. [Muista, että (\mathbb{R} -kertoimisessa) Hilbertin avaruudessa kahden vektorin a ja b välinen kulma $\varphi \in [0, 2\pi)$ saatiin ehdosta $(a | b) = \|a\| \|b\| \cos \varphi$.]



KUVA 7. vasemmalla tylppä kulma; oikealla terävä

4.20. **Lause.** Olkoon E Hilbertin avaruus sekä $F \subset E$ sen suljettu konvekksi ja epätyhjä osajoukko. Olkoon myös $x \in E$ ja $y \in F$. Tällöin

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, F) \iff \text{Re}(x - y | z - y) \leq 0 \quad \text{kaikilla } z \in F.$$

Todistus. Olkoon $\|x - y\| = \text{dist}(x, F)$. Jos $z \in F$ ja $0 < t < 1$, niin konveksisuuden nojalla $y + t(z - y) = (1 - t)y + tz \in F$. Siispä

$$\|x - y - t(z - y)\|^2 \geq \|x - y\|^2,$$

josta kehittämällä vasen puoli auki sisätulon avulla saadaan

$$\|x - y\|^2 - 2t \text{Re}(x - y | z - y) + t^2 \|z - y\|^2 \geq \|x - y\|^2.$$

Saamme tästä $\operatorname{Re}(x - y | z - y) \leq (t/2)\|z - y\|^2$ kaikilla $0 < t < 1$. Antamalla $t \rightarrow 0$ nähdään, että $\operatorname{Re}(x - y | z - y) \leq 0$.

Kääntäen, oletetaan että $\operatorname{Re}(x - y | z - y) \leq 0$ kaikilla $z \in F$. Tällöin oletuksen perusteella

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|x - y - (z - y)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2\operatorname{Re}(x - y | y - z) + \|z - y\|^2 \\ &\geq \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

kaikilla $z \in F$. Tämä tarkoittaa, että $y \in F$ on normin minimoiva alkio, joten $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$. Lause on näin todistettu. \square

ORTOGONAALISET PROJEKTIOT

Sovellamme seuraavaksi minimointilauseetta 4.19 erikoistapaukseen, missä F on suljettu vektorialiavaruus. Tämä johtaa ortoprojektioihin, jotka tulevat olemaan lineaarisia kuvauksia.

4.21. Lause. *Olkoon E Hilbertin avaruus ja M sen suljettu vektorialiavaruus. Jos $x \in E$ ja $y \in M$, niin*

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, M) \quad \Leftrightarrow \quad (x - y) \perp M \quad (\text{eli } (x - y | z) = 0 \quad \forall z \in M).$$

Todistus. Oletamme ensin, että $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, M)$. Jos $z \in M$ sekä $\lambda \in \mathbb{K}$, niin lineaarinen kombinaatio $y + \lambda z \in M$ (koska M on vektorialiavaruus), ja Lauseen 4.20 nojalla

$$0 \geq \operatorname{Re}((x - y | (y + \lambda z) - y)) = \operatorname{Re}(\bar{\lambda}(x - y | z))$$

kaikilla $\lambda \in \mathbb{K}$. Valitsemalla $\lambda = (x - y | z)$ tästä seuraa, että

$$|(x - y | z)|^2 \leq 0,$$

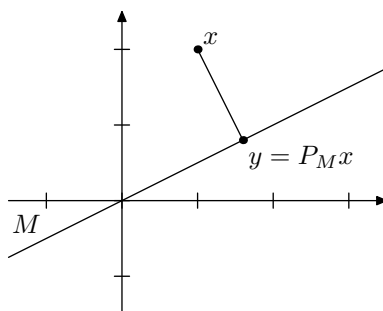
eli $(x - y | z) = 0$ kaikilla $z \in M$. Toisin sanoen, $x - y \in M^\perp$.

Kääntäen, oletetaan nyt, että $x - y \in M^\perp$. Jos $z \in M$, niin $z - y \in M$ ja siten $0 = (x - y | z - y) = \operatorname{Re}(x - y | z - y)$ kaikilla $z \in M$. Lauseen 4.20 nojalla tästä seuraa, että $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, M)$. \square

Kun M on avaruuden E suljettu vektorialiavaruus, olkoon $P_M: E \rightarrow E$ kuvaus, joka liittää vektoriin x sen yksikäsitteisen vektorin $y \in M$, joka minimoi x :n etäisyyden vektorialiavaruuteen M . Siis

$$(4.22) \quad P_M(x) = y \quad \text{jos ja vain jos } \|x - y\| = \operatorname{dist}(x, M).$$

Sanomme, että kuvaus P_M on avaruuden E ortoprojektio vektorialiavaruudelle M ja $y = P_M x$ on vektorin x ortoprojektio avaruudelle M .



Huomautus. Havaitaan lisäksi, että Lause 4.21 antaa seuraavanlaisen tavan karakterisoida vektorin x ortoprojektio:

$$(4.23) \quad y = P_M x \quad \text{jos ja vain jos} \quad y \in M \quad \text{ja} \quad x - y \perp M.$$

Toisin sanoen, ehdon (4.23) mukaan seuraava esitys määrää ortoprojektion yksikäsitteisesti kaikilla vektoreilla $x \in E$:

$$(4.24) \quad x = P_M(x) + (x - P_M(x)), \quad \text{missä} \quad P_M x \in M \quad \text{ja} \quad x - P_M x \in M^\perp.$$

Yksikäsitteisyys nähdään seuraavasti: jos $x \in E$ ja $x = y + z$, missä $y \in M$ ja $z \in M^\perp$, niin tällöin $P_M(x) + (x - P_M(x)) = y + z$. Tämä tarkoittaa, että

$$P_M(x) - y = z - (x - P_M(x)) \in M \cap M^\perp = \{\bar{0}\},$$

joten $y = P_M(x)$ (ja myös $z = x - P_M(x)$).

Ylläolevista tuloksista saadaan erityisesti

$$(4.25) \quad P_M x = \bar{0} \quad \text{kun} \quad x \in M^\perp, \quad P_M x = x \quad \text{kun} \quad x \in M.$$

Jos nimittäin $x \in M^\perp$, niin $x = \bar{0} + x$ on yksikäsitteinen esitys ehdossa (4.24), joten siis $P_M x = \bar{0}$. Jälkimmäinen väite seuraa suoraan määritelmästä (4.22).

Määrittelimme yllä ortoprojektion puhtaasti *metrisenä* suureena, mutta Hilbert avaruuden vektoriavaruus-struktuurin takia päädyimme lineaariseen operaattoriin.

4.26. Lause. *Olkoon M suljettu vektorialiavaruus Hilbertin avaruudessa E . Silloin ortoprojektio $P_M : E \rightarrow E$ on lineaarinen kuvaus.*

Todistus. Lineaarisuuden havaitsemiseksi käytetään esitystä

$$x + \lambda y = \underbrace{P_M x + \lambda P_M y}_{\in M} + \underbrace{(x - P_M x) + \lambda(y - P_M y)}_{\in M^\perp},$$

kun $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Esityksestä ja ehdon (4.24) yksikäsitteisyydestä seuraa, että $P_M(x + \lambda y) = P_M x + \lambda P_M y$. Siis P_M on lineaarinen.

□

Olkoon E vektoriavaruus. Lineaarialgebrasta muistamme, että lineaarikuvaus $P: E \rightarrow E$ on *projektio*, jos $P^2 = P$. (Tässä $P^2 = P \circ P$.) Mikäli $U = P(E)$ ja $V = \ker P = \{x \in E : Px = \bar{0}\}$, sanomme että P on projektio *avaruudelle* U *suuntaan* V .

Läheinen lineaarialgebran käsite on nk. suora summa. Sanomme, että E on aliavaruuksien U ja V *suora summa*, merkitään $E = U \oplus V$, jos

$$E = U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}, \text{ ja } U \cap V = \{\bar{0}\}.$$

Voidaan osoittaa, että jos P on projektio avaruudelle U suuntaan V , niin $E = U \oplus V$. (Nimittäin: jos $x \in E$, niin $x = Px + (x - Px)$, missä $Px \in U = P(E)$ ja $x - Px \in \ker(P) = V$.) Kääntäen, jos $E = U \oplus V$, niin suora summa määrittelee projektion P avaruudelle U suuntaan V . Nimittäin silloin jokaisella $x \in E$ on *yksikäsitteinen* esitys $x = u + v$, missä $u \in U$ ja $v \in V$. Asetetaan tällöin $P(x) = u$; nyt P on lineaarinen projektio ja $U = P(E)$, $V = \ker P$. [Näiden väitteiden (helpot) yksityiskohdat jätetään ylimääräiseksi lineaarialgebran harjoitustehtäväksi].

4.27. Lause. *Jos M on Hilbertin avaruuden E suljettu vektorialiavaruus, niin $E = M \oplus M^\perp$ ja P_M on avaruuden E projektio aliavaruudelle M suuntaan M^\perp . Lisäksi*

$$\|P_M x\| \leq \|x\| \quad \text{kaikilla } x \in E,$$

joten P_M on jatkuva lineaarinen operaattori.

Todistus. Lauseesta 4.13 sivulla 67 muistetaan, että M^\perp on avaruuden E vektorialiavaruus. Lisäksi (4.24) osoitti että jokainen $x \in E$ voidaan hajottaa summaksi $x = P_M x + x - P_M x$, missä $P_M x \in M$ ja $x - P_M x \in M^\perp$. Siis $E = M + M^\perp$. Lisäksi, jos $x \in M \cap M^\perp$, niin $\|x\|^2 = (x|x) = 0$, joten $x = \bar{0}$. Siispä $M \cap M^\perp = \{\bar{0}\}$ ja $E = M \oplus M^\perp$ on siten suora summa.

Seuraavaksi tarkastellaan esitystä $x = P_M x + z$, missä $z = x - P_M x \in M^\perp$. Koska edellä havaitsimme että $P_M z = \bar{0}$, niin lineaarisuuden avulla saadaan

$$P_M^2 x = P_M(P_M x) = P_M(x - z) = P_M x - P_M z = P_M x.$$

Siis P_M on projektio. Ehto $P_M(E) = M$ seuraa kaavasta (4.23) [valitaan $y = x$]. Todettiin edellä, että $M^\perp \subset \ker(P)$. Kääntäen, jos $x \in E$ ja $P_M(x) = \bar{0}$, niin esityksen (4.24) yksikäsitteisyydestä seuraa $x = \bar{0} + x \in M^\perp$.

Lopuksi, normiarviota varten käytetään Pythagoraan lausetta (Lause 4.8),

$$\|x\|^2 = \|P_M x + (x - P_M x)\|^2 = \|P_M x\|^2 + \|x - P_M x\|^2 \geq \|P_M x\|^2,$$

joten väite seuraa. □

4.28. *Huomautus.* (1) Lauseesta 4.27 seuraa myös, että itse asiassa $\|P_M\| = 1$ kun $M \neq E$ (Miksi ?!).

(2) Olkoon yleisemmin $F \subset E$ suljettu konvekssi joukko. Seurauksen 4.19 nojalla on olemassa sellainen *metrinen projektio* $P_F : E \rightarrow E$, että jokaisella $x \in E$ pätee $P_F(x) = y$, missä $y \in F$ on se yksikäsitteinen vektori jolle $\|x - y\| = \text{dist}(x, F)$. Metrinen projektio P_F ei yleensä ole lineaarikuvaus, mutta se on kuitenkin aina *kontraktio* (HT 4:9):

$$\|P_F(u) - P_F(v)\| \leq \|u - v\| \quad \text{kaikilla } u, v \in E.$$

ORTONORMAALIT KANNAT

4.29. **Määritelmä.** Sisätuloavaruuden jono (e_n) on *ortonormaali* (tai *ortonormitettu*), jos

$$(e_i | e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Toisin sanoen, jono (e_j) on ortonormaali, jos $e_i \perp e_j$ aina kun $i \neq j$ ja $\|e_j\| = 1$ jokaisella j .

4.30. Esimerkki.

(1) Kanoniset kantavektorit $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \ell^2$, missä nolasta eroava termi on n :s, $n \in \mathbb{N}$, muodostavat ortonormaalin jonon avaruudessa ℓ^2 .

(2) $E = L^2(0, 2\pi)$ varustettuna sisätulolla

$$(x | y) = \int_0^{2\pi} x(t)\overline{y(t)} dt,$$

on Hilbertin avaruus; jono $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, missä

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos(nt) + i \sin(nt)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

on ortonormitettu jono avaruudessa E . Nimittäin, jos $n \neq m$ niin

$$\begin{aligned} (x_n | x_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt \\ &= \frac{1}{i2\pi(n-m)} (e^{i(n-m)2\pi} - e^{i(n-m)0}) = 0. \end{aligned}$$

Edellä käytettiin tietoa $\overline{e^{imt}} = e^{-imt}$.

Ortonormaaleja jonoja ja niiden määrittämiä vektorisummia voi helposti kontrolloida tärkeän *Besselin epäyhtälön* avulla.

Lause (Besselin epäyhtälö). *Jos (e_n) on ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E , niin*

$$(B) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |(x | e_k)|^2 \leq \|x\|^2$$

kaikilla $x \in E$. Erityisesti,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x | e_k) = 0.$$

Huomautus. Besselin epäyhtälö (B) pätee myös äärelliselle ortonormaalille jonnolle $(e_1, \dots, e_m) \subset E$. (Todistus kuten alla, mutta ilman vaihetta $n \rightarrow \infty$.)

Todistus. Jos (e_n) on ortonormaali jono avaruudessa E ja $x \in E$, niin havaitaan aluksi että vektorit $x - \sum_{k=1}^n (x | e_k)e_k$ ja $\sum_{k=1}^n (x | e_k)e_k$ ovat kohtisuoria toisiaan kohtaan kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nimittäin, ottamalla sisätulo termeittäin saadaan

$$(4.31) \quad \begin{aligned} (x - \sum_{k=1}^n (x | e_k)e_k | e_j) &= (x | e_j) - \sum_{k=1}^n (x | e_k)(e_k | e_j) \\ &= (x | e_j) - (x | e_j) = 0, \end{aligned}$$

kun $j = 1, \dots, n$. Näin siis $x - \sum_{k=1}^n (x | e_k)e_k \perp \sum_{k=1}^n (x | e_k)e_k$ (muista: ortokomplementti on vektorialiavaruus). Siten Pythagoraan lauseen mukaan

$$(4.32) \quad \begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n (x | e_k)e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n (x | e_k)e_k \right\|^2 \\ &\geq \left\| \sum_{k=1}^n (x | e_k)e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |(x | e_k)|^2 \end{aligned}$$

Edellä myös viimeinen yhtäsuuruus perustui Pythagoraan lauseeseen (ja siihen että $\|e_j\| = 1$ jokaisella j).

Olemme siis näyttäneet, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sum_{k=1}^n |(x | e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Antamalla lopuksi $n \rightarrow \infty$ saadaan Besselin epäyhtälö (B). □

4.33. Määritelmä. Jos (e_n) on ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E ja $x \in E$, niin lukuja $(x | e_k)$ sanotaan vektorin x *Fourier-kertoimiksi* jonon (e_n) suhteen.

Jos E on vektorialiavaruus ja $A \subset E$, olkoon $\text{span}(A)$ joukon A virittämä avaruuden E vektorialiavaruus, eli

$$\text{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, a_i \in A \right\}.$$

Edelleen $\overline{\text{span}}(A)$ on aliavaruuden $\text{span}(A)$ sulkeuma avaruudessa E .

Seuraava tulos antaa hyödyllisen ja konkreettisen kaavan ortoprojektioille vektoreiden e_1, \dots, e_n virittämälle aliavaruudelle, tapauksessa missä (e_1, \dots, e_n) on äärellinen ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E .

4.34. Lause. *Olkoon E Hilbertin avaruus, $(e_j)_{j=1}^n \subset E$ äärellinen ortonormaali jono sekä $M = \text{span}(\{e_1, \dots, e_n\})$. Tällöin*

a) *M on suljettu E :n vektorialiavaruus, eli $M = \overline{\text{span}}(\{e_1, \dots, e_n\})$.*

b) *jos $P = P_M$ on ortoprojektio M :lle, niin*

$$(4.35) \quad Px = \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k, \quad x \in E.$$

Todistus. Kaavan (4.35) määrittelemä kuvaus P on selvästi lineaarinen, koska kuvaus $x \mapsto (x | e_j)$ on lineaarinen kaikilla j . Lisäksi Pythagoraan lauseen ja Besselin epäyhtälön nojalla $\|Px\|^2 = \sum_{k=1}^n |(x | e_k)|^2 \leq \|x\|^2$ kun $x \in E$, joten P on jatkuva (luku 2).

Toisaalta, jos $x \in M$, niin $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ joillakin skalaareilla $\lambda_k \in \mathbb{K}$. Ottamalla tästä sisätulo e_j :n kanssa, saadaan ortogonaalisuuden nojalla $\lambda_j = (x | e_j)$, $j = 1, \dots, n$. Mutta tämä kertoo, että $Px = x$ jokaisella $x \in M$. Koska $Px \in M$ määritelmän nojalla, niin

$$M = \{x \in E : Px = x\} = \ker(I - P),$$

missä I on avaruuden E identtinen kuvaus. Jatkuvan lineaarikuvauksen $I - P$ ytimenä $M = (I - P)^{-1}(\{\bar{0}\})$ on näin ollen suljettu vektorialiavaruus.

Lopuksi, kuten yhtälössä (4.31) nähdään, että

$$e_j \perp \left(x - \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

eli yhtäpitävästi $x - Px \in M^\perp$, $x \in E$. Lauseen 4.21 mukaan ehdot $Px \in M$ ja $x - Px \in M^\perp$ karakterisoivat ortoprojektion yksikäsitteisesti; vrt. myös (4.23). Siis $P_M x = \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k = Px$ kaikilla $x \in E$, joten olemme todistaneet myös väitteen b). \square

4.36. Huomautus. (1) Pätee yleisesti: Jokaisessa Banachin avaruudessa jokainen äärellisulotteinen aliavaruus on suljettu [Tähän (ehkä) palataan myöhemmin].

(2) Lineaarialgebran kurssilta tunnetulla Gram-Schmidtin menetelmällä jokaiseen Hilbert-avaruuden äärellisulotteiseen aliavaruuteen M voidaan konstruoida ortonormaali kanta (vrt. Lauseen 4.41 todistus alla); tällöin Lause 4.34 antaa konkreettisen lausekkeen M :n ortoprojektioille.

(3) Voimme nyt yhdistää Lauseet 4.21 ja 4.34, jolloin saamme seuraavan tulkinnan: Jos (e_1, \dots, e_n) on ortonormaali jono E :ssä, niin jokaisella $x \in E$ funktio

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|, \quad \mathbb{K}^n \rightarrow [0, \infty),$$

saa pienimmän arvonsa *täsmälleen* (!) silloin, kun

$$\lambda_k = (x | e_k), \quad \text{kaikilla } k = 1, \dots, n.$$

Kyseinen pienin arvo on $\left\| x - \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k \right\| = \text{dist}(x, M)$.

Tutkimme seuraavaksi ortonormaaleista vektoreista muodostettujen sarjojen summautumista Hilbertin avaruuksissa. Osoittautuu, että summautuminen riippuu vain kerroinjonon ominaisuuksista (yleisissä Banach-avaruus summissa tilanne ei ole lainkaan yhtä helppo):

4.37. Lause. *Olkoon $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E . Jos $\lambda_n \in \mathbb{K}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \text{ suppenee jos ja vain jos } \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty.$$

Tällöin pätee

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

Todistus. Olkoon $s_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ sarjan n :s osasumma kun $n = 1, 2, \dots$. Tällöin määritelmän ja täydellisyyden nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ suppenee jos ja vain jos (s_n) on Cauchyn jono.

Olkoon tätä varten $p, q \in \mathbb{N}$ ja $p < q$, jolloin Pythagoraan lauseen nojalla

$$\|s_q - s_p\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^q \lambda_k e_k - \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^q \lambda_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^q |\lambda_k|^2.$$

Siispä osasummat (s_n) muodostavat Cauchyn jonon avaruudessa E jos ja vain jos positiiviterminen sarja $\sum_k |\lambda_k|^2$ suppenee. Tämä osoittaa väitteen ensimmäisen osan. Jos nyt

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k,$$

niin sisätulon jatkuvuuden ja ortonormaalisuuden nojalla

$$(x | e_j) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \mid e_j \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \mid e_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_k | e_j) = \lambda_j$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$, mistä samoin

$$\|x\|^2 = (x|x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \mid x \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e_k \mid x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \bar{\lambda}_k = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

□

4.38. Seuraus (Riesz–Fischerin lause). *Olkoon E Hilbertin avaruus ja $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sen ortonormaali jono. Jos $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$, niin löytyy sellainen $x \in E$, että*

$$(x \mid e_k) = \lambda_k, \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N},$$

toisin sanoen, kuvaus $x \mapsto ((x \mid e_k))_{k \in \mathbb{N}}$ on surjektio $E \rightarrow \ell^2$.

Todistus. Lauseen 4.37 nojalla $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ suppenee E :ssa, ja Fourier ker-
toimet $(x \mid e_k) = \lambda_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ (vrt. edellä Lauseen 4.37 todistus). □

4.39. Määritelmä. Hilbertin avaruuden E ortonormaali jono $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on *Hilbertin kanta* (tai *ortonormaali kanta*) avaruudessa E , jos

$$\overline{\text{span}}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\}) = E.$$

Huomautus. (1) Jono $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on Hilbertin kanta jos ja vain jos $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on maksimaalinen ortonormaali joukko avaruudessa E .

Todistus. Jos $M = \overline{\text{span}}(\{e_n : n \in N\})$, niin $M \neq E \iff M^\perp \neq \{\bar{0}\}$ (muista: $E = M \oplus M^\perp$ Lauseen 4.27 nojalla). Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että löytyy $x \in M^\perp$, jolle $\|x\| = 1$. Tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että joukko $\{x\} \cup \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ on ortonormaali $\iff M$ ei ole maksimaalinen ortonormaali joukko avaruudessa E . □

(2) Äärellisulotteisissa Hilbertin avaruuksissa E tilanne on helpompi (ja lineaarialgebran tiedot riittävät): jos $\dim(E) = n < \infty$, niin ortonormaali jono (e_1, \dots, e_n) on *Hilbertin kanta* avaruudessa E . Nimittäin, ortonormaali jono (e_1, \dots, e_n) on aina vapaa, joten dimension perusteella pätee jopa $E = \text{span}(\{e_1, \dots, e_n\})$.

Seuraava Hilbertin kantojen karakterisaatiolause on keskeinen Hilbertin avaruuksien teoriassa ja sovelluksissa. Tulos formuloidaan tässä ääretönulotteisessa tapauksessa (vrt. Huomautuksessa (2) oleva kommentti äärellisulotteisesta tilanteesta).

4.40. Lause. *Olkoon $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E . Silloin seuraavat viisi ehtoa ovat yhtäpitäviä:*

a) *jono $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa E ,*

b) sisätulot $(x | e_n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$,

c) jokaisella $x \in E$ on voimassa $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) e_n$ (suppeneminen on normin mielessä, eli

$$\| x - \sum_{n=1}^N (x | e_n) e_n \| \rightarrow 0, \quad \text{kun } N \rightarrow \infty,$$

d) jokaisella $x \in E$ on voimassa

$$\| x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x | e_n)|^2,$$

e) jokaisella $x, y \in E$ on voimassa

$$(x | y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) \overline{(y | e_n)}.$$

Huomautus. (1) Ehtoa d) sanotaan *Parsevalin yhtälöksi* ja ehtoa e) *Plancherelin kaavaksi*. (Kirjallisuudessa on terminologiassa vaihtelua: joskus sekä ehtoa d) että e) kutsutaan Parsevalin yhtälöiksi.)

(2) Ehdossa b) esityksen $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) e_n$ kertoimet $(x | e_n), n \in \mathbb{N}$, ovat yksikäsitteiset kaikilla $x \in E$.

(3) Vastaavanlainen karakterisaatio pätee kun $\dim(E) = m$ ja $(e_1, \dots, e_m) \subset E$ on ortonormaali jono. (Ehdoissa c) - e) summataan silloin vain 1:stä m :ään.) Todistus on helpompi variaatio allaolevasta.

Todistus. Havaitaan aluksi että jokaisella joukolla $A \subset E$ pätee

$$(\bar{A})^{\perp} = A^{\perp},$$

missä \bar{A} on A :n sulkeuma. Nimittäin, jos $x \in A^{\perp} = \{x \in E : (x | a) = 0 \forall a \in A\}$ niin sisätulon jatkuvuuden nojalla myös $(x | a) = 0$ kaikilla $a \in \bar{A}$, eli $x \in (\bar{A})^{\perp}$. Toisaalta, käänteinen inklusio $(\bar{A})^{\perp} \subset A^{\perp}$ on selvä. Erityisesti, jos $M = \overline{\text{span}}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$, niin b) on yhtäpitävää ehdon $M^{\perp} = \{\bar{0}\}$ kanssa. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa että $M = E$, koska $E = M \oplus M^{\perp}$ (vrt. Lause 4.27). Toisin sanoen, a) ja b) ovat yhtäpitäviä.

Helposti havaitaan, että

$$e) \implies d) \implies b).$$

Käänteiseen suuntaan osoitetaan ensin, että $b) \implies c)$. Oletetaan siis, että ehto b) on voimassa. Jos $x \in E$, niin olkoon

$$\hat{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) e_n,$$

missä oikeanpuoleinen sarja suppenee avaruudessa E Besselin epäyhtälön ja Lauseen 4.37 nojalla. Nyt kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$(\hat{x} | e_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N (x | e_n) e_n \mid e_k \right) = (x | e_k)$$

eli $(\hat{x} - x | e_k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Ehdon b) nojalla siis $\hat{x} = x$, joten olemme näyttäneet, että c) pätee.

Lopuksi, näytetään $c) \implies e)$. Koska oletuksen mukaan

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) e_n$$

kaikilla $x \in E$, on siis taas jatkuvuuden ja lineaarisuuden perusteella

$$\begin{aligned} (x | y) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N (x | e_n) e_n \mid y \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (x | e_n) (e_n | y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) (e_n | y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) \overline{(y | e_n)}. \end{aligned}$$

(Edellä oikeanpuoleinen sarja suppenee Hölderin epäyhtälön perusteella.) \square

Jos Hilbertin avaruudessa E ylipäättään on Hilbertin kanta, niin selvästi E on separoituva. Käy ilmi että tämä onkin ainoa rajoite Hilbertin kannan löytymiselle.

4.41. Lause. *Jokaisessa separoituvassa Hilbertin avaruudessa E on Hilbertin kanta.*

Todistus. (1) Oletetaan, että $\dim E = n < \infty$. Silloin avaruudella E on lineaarinen kanta (x_1, \dots, x_n) . Käyttämällä Lineaarialgebrasta tuttua *Gram-Schmidtin menetelmää* voidaan tästä kannasta konstruoida uusi, ortonormaali kanta. Tämä on tehty yksityiskohtaisesti esim. Honkasalon monisteessa s. 70, Lauseessa 3.3.3.

Kertaamme tässä lyhyesti Gram-Schmidtin konstruktion: Olkoon

$$M_q = \text{span}(\{ x_j : 1 \leq j \leq q \})$$

Osoitetaan induktiolla luvun q suhteen, että avaruudella M_q on ortonormaali kanta jokaisella $q = 1, \dots, n$. Väite seuraa tästä, kun $q = n$.

Tapaus $n = 1$ on selvä valitsemalla $e_1 = \|x_1\|^{-1}x_1$. Oletetaan, että avaruudella M_q on ortonormaali kanta (e_1, \dots, e_q) . Olkoon P_q avaruuden E ortoprojektio aliavaruudelle M_q ja $y_{q+1} = x_{q+1} - P_q x_{q+1}$. Koska jono (x_1, \dots, x_n) on lineaarisesti vapaa, tiedämme että $x_{q+1} \notin M_q$, joten $y_{q+1} \neq \bar{0}$ ja $y_{q+1} \perp M_{q+1}$

Lauseen 4.21 mukaan. Valitaan $e_{q+1} = \|y_{q+1}\|^{-1}y_{q+1}$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla joukko $\{e_1, \dots, e_{q+1}\}$ muodostaa avaruuden M_{q+1} ortonormaalin kannan, koska $\dim(M_{q+1}) = q + 1$. Siispä väite on osoitettu.

(2) Oletetaan sitten, että $\dim E = \infty$. Koska E on separoituva, voimme löytää tiheän jonon $(x_n)_{n=1}^\infty$. Konstruoidaan induktiolla sellainen osajono (x_{n_j}) , että kaikilla $p \in \mathbb{N}$ on voimassa:

- (i) joukko $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_p}\}$ on lineaarisesti vapaa, ja
- (ii) $x_m \in \text{span}(\{x_{n_1}, \dots, x_{n_p}\})$ aina, kun $1 \leq m \leq n_p$, toisin sanoen,

$$(4.42) \quad \text{span}(\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_p}\}) = \text{span}(\{x_r : 1 \leq r \leq n_p\}).$$

[*Konstruktio:* Jos on löydetty $n_1 < \dots < n_p$ siten että ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa, olkoon luku $n_{p+1} > n_p$ pienin luonnollinen luku $m > n_p$, jolle $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_p}, x_m\}$ on vapaa joukko. Tällöin myös

$$x_r \in \text{span}(\{x_{n_1}, \dots, x_{n_p}, x_{n_{p+1}}\})$$

aina kun $n_p < r < n_{p+1}$. Nimittäin: valinnan perusteella on $cx_r + \sum_{j=1}^p c_j x_{n_j} = \bar{0}$ jollakin $c \neq 0$ (mieti miksi!)]

Merkitään $y_k = x_{n_k}$ kun $k \in \mathbb{N}$. Soveltamalla kohdan (1) ortonormeeraustekniikkaa jonoon (y_k) saamme konstruotua avaruuteen E Hilbertin kannan (e_k) . Edellä tarvittava ominaisuus $E = \overline{\text{span}}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$ seuraa jonon (x_n) tiheydestä, sekä ehdosta (4.42) (tarkista!) \square

Olkoon $(e_j)_{j \in \mathcal{J}}$ separoituva Hilbertin avaruuden ortonormaali kanta, missä $\mathcal{J} = \mathbb{N}$ tai $\mathcal{J} = \{1, \dots, n\}$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Tällöin jokaisella $x \in E$ on yksikäsitteinen esitys

$$x = \sum_{k \in \mathcal{J}} (x | e_k) e_k.$$

Olkoon aluksi $\mathcal{J} = \mathbb{N}$. Määritellään lineaarikuvaus $T: \ell^2 \rightarrow E$ asettaen

$$T((\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k e_k, \quad (\lambda_k) \in \ell^2.$$

Tällöin T on lineaarinen *isomorfsmi* $\ell^2 \rightarrow E$ (toisin sanoen, T on sellainen lineaarinen bijektio $\ell^2 \rightarrow E$, että T ja sen käänteiskuvaus T^{-1} ovat jatkuvia). Nimittäin: Lauseen 4.37 nojalla

$$\|Tx - Ty\| = \left\| \sum_k (x_k - y_k) e_k \right\| = \left(\sum_k |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2} = \|x - y\|_2$$

kaikilla $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$. (Itse asiassa, T on jopa *isometria*, eli etäisyydet säilyvät tarkalleen.) Lisäksi T on lineaarinen bijektio Lauseiden 4.37 ja 4.40 perusteella. Lineaarisuus seuraa suppenevien sarjojen ominaisuuksista (tarkista!). Jos $x = (x_k) \in \ell^2$ ja $Tx = \sum_{k=1}^\infty x_k e_k = \bar{0}$, niin $x_k = 0$ kaikilla

k esityksen yksikäsitteisyyden nojalla. Tosiaalta, jos $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x | e_k) e_k \in E$, niin jono $((x | e_k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ Parsevalin kaavan perusteella, ja

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x | e_k) e_k = T((x | e_k)_{k \in \mathbb{N}}).$$

Tapauksessa $\mathcal{J} = \{1, \dots, n\}$ saadaan lineaarikuvaus $T: \mathbb{K}^n \rightarrow E$ ehdolla

$$T((\lambda_k)_{k \in \mathcal{J}}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

Tässäkin T on samoin lineaarinen isomorfismi $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow E$.

Yhteenvetona siis kaikki separoituvat Hilbertin avaruudet ovat isomorfismia vaille joko tyyppiä ℓ^2 tai $\ell_2^n = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$!

4.43. Esimerkkejä.

(1) Olkoon $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^2$ (ykköinen n :nnessa kohdassa) kun $n = 1, 2, \dots$. Tällöin (e_n) on jonoavaruuden ℓ^2 ortonormaali kanta: jos $x = (x_n) \in \ell^2$ ja $0 = (x | e_n) = x_n$ kaikilla n , niin $x = \bar{0}$. (Lause 4.40, ehto b))

(2) Olkoon $L^2(0, 1) \equiv L^2([0, 1])$ reaalikertoiminen Hilbertin avaruus, joka koostuu 2-integroituvista funktioista $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, joille $\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$ (tarkemmin: vastaavista ekvivalenssiluokista, vrt. lukua 3). *Haarin systeemi* $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ on ehkä helpoin tapa konstruoida Hilbertin kanta avaruuteen $L^2(0, 1)$. Lähdemme liikkeelle välin $[0, 1]$ karakteristisesta funktiosta ja valitsemme $h_0(x) = \chi_{[0,1]}(x) = 1$ kaikilla $x \in [0, 1]$. Selvästi $\|h_0\|_2 = 1$.

Muut kantafunktiot valitaan seuraavasti: Jos $0 \leq j < 2^k$, olkoon $n = 2^k + j$ ja

$$\Delta_n = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right] \subset [0, 1],$$

$$\Delta_n^+ = \left(\frac{j}{2^k}, \frac{j+1/2}{2^k} \right), \quad \Delta_n^- = \left(\frac{j+1/2}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right).$$

Asetetaan

$$h_n(t) = 2^{\frac{k}{2}} (\chi_{\Delta_n^+}(t) - \chi_{\Delta_n^-}(t)) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & t \in \Delta_n^+ \\ -2^{\frac{k}{2}}, & t \in \Delta_n^- \\ 0, & t \notin \Delta_n^+ \cup \Delta_n^- \end{cases}$$

kun $n = 1, 2, 3, \dots$, ja $n = 2^k + j$ kuten edellä.

(Piirrä itsellesi neljän ensimmäisen Haarin funktion h_0, \dots, h_4 kuvaajat !)

Näin muodostettu Haarin systeemi $(h_n(x))_{n=0}^{\infty} \subset L^2(0, 1)$ on Hilbertin kanta. [Mittateoreettisine yksityiskohtineen tämä on pitkäkö harjoitustehtävä, katso HT 4:12 ja 4:13.] Haarin kannan Fourier-kertoimet funktiolle $f \in L^2(0, 1)$

saadaan kaavoista

$$(f | h_0) = \int_0^1 f(t) dt, \quad (f | h_n) = 2^{\frac{k}{2}} \left[\int_{\Delta_n^+} f dt - \int_{\Delta_n^-} f dt \right]$$

kun $n = 2^k + j$ kuten edellä. Siis kaikilla $f \in L^2(0, 1)$ on

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f | h_n) h_n$$

ja sarja suppenee avaruudessa $L^2(0, 1)$, so. L^2 -normin mielessä.

(3) Luvussa 5 osoitetaan, että jono $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ on ortonormaali kanta \mathbb{C} -kertoimisessa Hilbertin avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$.

Allaolevat kohdat (4) - (6) ovat tekstissä mainittu lisätietoina, eikä *näitä esimerkkejä luennoilla käsitelty vuonna 2010*.

(4) Haarin systeemillä on seuraava mainio skaalausominaisuus,

$$h_n(x) = 2^{k/2} h_1(2^k x - j)$$

kun $n = j + 2^k$ ja $x \in \Delta_n$ kuten edellä. Tällaiset skaalaus-ominaisuudet helpottavat merkittävästi numerisointia. Toisaalta Haarin systeemin pulmana on se että kantafunktiot h_n ovat epäjatkuvia. Etsittäessä kantafunktioita, jotka ovat jatkuvia tai sileitä, ja joilla on samat skaalausominaisuudet, on päädytty niin sanottuihin *wavelet*-kantoihin, joita on viime aikoina on tutkittu erityisen paljon. Näillä on myös käytännön mielenkiintoa monissa sovelluksissa, jotka liittyvät muun muassa signaalinkäsittelyyn, kuvankäsittelyyn jne. Pulmana on ettei kompaktikantajaisella waveletillä (= funktion h_1 vastineella) ole esitystä alkeisfunktioiden avulla, paitsi sarjakehitelmänä. Esitämme siksi tässä vain kuvan tyypillisestä wavelet-kannasta. Esimerkiksi, jos ψ on ao. kuvan funktio

tähän tulee kuva!!

niin funktiot $2^{j/2} \psi(2^j x - k)$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $j, k \in \mathbb{Z}$, muodostavat Hilbertin kannan L^2 :ssa.

(5) Soveltamalla Lauseen 4.41 kohdan (1) yhteydessä esiteltyä *Gram-Schmidt* ortonormeeraus menetelmää polynomeihin saadaan Hilbertin kantoja moniin

eri (painotettuihin) L^2 -avaruuksiin. Esimerkiksi, olkoon

$$p_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((t^2 - 1)^n)$$

n :s *Legendren polynomi*. Analyysin peruskurssien tietojen avulla tiedämme, että

$$(p_n | p_k) = \int_{-1}^1 p_n(t) p_k(t) dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{nk},$$

missä δ_{nk} on *Kroneckerin δ -symboli* eli

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Merkitään $e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} p_n$. Voidaan todistaa, että saatu jono $(e_n)_{n=0}^\infty$ on Hilbertin kanta avaruudessa $L^2([-1, 1])$. Jono voidaan konstruoida myös suoraan käyttämällä Gram-Schmidtin menetelmää polynomien jonoon $(1, t, t^2, t^3, \dots)$.

(6) Olkoon

$$L^2(\mathbb{R}, \rho) := \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \rho(t) d\mu < \infty \right\}, \quad \rho(t) = e^{-t^2}.$$

Tällöin *Hermiten polynomit*

$$H_n(t) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2t)^{n-2k}}{k! (n-2k)!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

muodostavat avaruuden $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2})$ ortonormaalin kannan. Myös tämä jono on saatu Gram-Schmidtin menetelmällä jonosta $(1, t, t^2, t^3, \dots)$.

Laguerren polynomit määritellään kaavalla

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{t^k}{k!}, \quad \alpha > -1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Systeemi $(L_n^{(\alpha)})_{n=0}^\infty$ on ortonormaali kanta avaruudessa $L^2(\mathbb{R}_+, te^{-t})$.

Harjoitustehtäviä

4:1 Olkoon (x_n) sellainen sisätuloavaruuden E jono, että $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ sekä $(x_n | x) \rightarrow \|x\|^2$ kun $n \rightarrow \infty$. Näytä, että $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$.

4:2 Olkoon E sisätuloavaruus. Totea, että seuraava *polarisaatiokaava* on voimassa:

(i) jos skalaarikunta $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, niin

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2, \quad x, y \in E.$$

(ii) jos skalaarikunta $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, niin

$$4(x|y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2, \quad x, y \in E.$$

4:3. Olkoon (x_n) Hilbertin avaruuden H jono. Sanomme että (x_n) suppenee *heikosti* kohti vektoria $x \in H$ jos $(x_n|y) \rightarrow (x|y)$ kun $n \rightarrow \infty$ kaikilla $y \in H$. Tällöin merkitään $x_n \xrightarrow{w} x$ kun $n \rightarrow \infty$. Näytä:

(i) jos $x_n \xrightarrow{w} x$ ja lisäksi $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ kun $n \rightarrow \infty$, niin $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$,

(ii) jos $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^2$ (ykköinen n :nnellä paikalla), niin $e_n \xrightarrow{w} \bar{0}$ avaruudessa ℓ^2 kun $n \rightarrow \infty$.

4:4 Totea, että avaruudet $L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty, p \neq 2$, eivät ole Hilbertin avaruuksia (siis normi $\|\cdot\|_p$ ei ole minkään sisätulon indusoima). [*Ohje.* Testaa suunnikasyhtälön (Lause 4.9) voimassaoloa sopivilla yksinkertaisilla funktioilla f ja g .]

4:5 Määritellään uusi normi avaruuteen ℓ^2 asettamalla

$$\|x\| = \|x\|_2 + \sup_n |x_n|, \quad x = (x_n) \in \ell^2.$$

Näytä: $\|\cdot\|$ on ekvivalentti tavallisen normin $\|\cdot\|_2$ kanssa, mutta $(\ell^2, \|\cdot\|)$ ei ole Hilbertin avaruus (ts. $\|\cdot\|$ ei ole minkään avaruuden ℓ^2 sisätulon indusoima normi).

4:6 Näytä: (i) $A = \{f \in C(0, 1) : f(0) = 1\}$ on avaruuden $C(0, 1)$ suljettu konvekssi joukko, jossa on äärettömän monta normin minimoivaa alkia f .

(ii) $B = \{f \in C(0, 1) : f(0) = 0 \text{ ja } \int_0^1 f(t)dt = 1\}$ on avaruuden $C(0, 1)$ suljettu konvekssi joukko, jossa ei ole yhtään normin minimoivaa alkia.

4:7 Laske

$$\min_{a,b,c \in \mathbf{R}} \int_{-1}^1 |t^3 - a - bt - ct^2|^2 dt.$$

[*Ohje:* Etsi sopiva ortoprojektio Hilbertin avaruudessa $L^2([-1, 1])$.]

4:8 Olkoon E Hilbertin avaruus, M sen suljettu vektorialiavaruus ja asetetaan $M^{\perp\perp} = (M^\perp)^\perp$. Osoita, että $M^{\perp\perp} = M$. [*Vihje:* Jos $x \notin M$, näytä että $x \notin M^{\perp\perp}$ Lauseen 4.21 avulla.]

4:9. Olkoon $F = \{f \in L^2(0, 1) : \int_0^1 f d\mu = 0\}$.

(i) Määrää ortokomplementti F^\perp etsimällä konkreettinen esitys $f = f_1 + f_2$, missä $f_1 \in F$.

(ii) Määrää etäisyys $dist(g, F) = \inf\{\|g - f\|_2 : f \in F\}$, missä $g(t) = e^t$ kun $t \in [0, 1]$.

4:10 Olkoon E Hilbertin avaruus ja $\emptyset \neq K \subset E$ suljettu konvekssi osajoukko. Minimointitulosten 4.18 ja 4.19 nojalla on olemassa kuvaus $P_K : E \rightarrow E$, jolle $P_K x \in K$ ja $\|x - P_K x\| = \text{dist}(x, K)$ kaikilla $x \in E$. Osoita, että *metrinen* projektio P_K on kontraktio, eli

$$\|P_K x_1 - P_K x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in E.$$

[*Juonikuvi*o. Olkoon $y_i = P_K x_i$ kun $i = 1, 2$. Lauseen 4.20 nojalla pätee $\text{Re}(x_i - y_i | z - y_i) \leq 0$ kaikilla $z \in K$ kun $i = 1, 2$. Sijoita $z = y_2$ kun $i = 1$, $z = y_1$ kun $i = 2$, ja laske arviot sopivasti yhteen. Lopuksi sovelta Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä.]

4:11 Olkoon E Hilbertin avaruus, $M \subset E$ suljettu vektorialiavaruus, sekä $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Hilbertin kanta aliavaruudelle M . Näytä, että avaruuden E ortoprojektio P_M aliavaruudelle M on

$$P_M x = \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) e_n, \quad x \in E.$$

[*Ohje*: katso Lauseen 4.34 todistusta.]

4:12 Näytä, että Haarin systeemi $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ on ortonormaali jono avaruudessa $L^2(0, 1) \equiv L^2([0, 1])$.

4:13 Osoita, että Haarin systeemi $(h_n(x))_{n=0}^{\infty} \subset L^2(0, 1)$ on Hilbertin kanta etenemällä seuraavien askeleitten kautta (käyttäen mittateorian tietoja):

(i) Dyadisten välien Δ_k karakteristiset funktiot

$$\chi_{\Delta_k} \in \text{span}(\{h_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})$$

in $L^2(0, 1)$ kaikilla k ,

- (ii) $\chi_G \in \overline{\text{span}}(\{h_n : n \in \mathbb{N}\})$ kaikilla avoimilla joukoilla $G \subset [0, 1]$,
- (iii) $\chi_A \in \overline{\text{span}}(\{h_n : n \in \mathbb{N}\})$ kaikilla mitallisilla joukoilla $A \subset [0, 1]$,
- (iv) kaikki yksinkertaiset funktiot $f \in \overline{\text{span}}(\{h_n : n \in \mathbb{N}\})$,
- (v) $L^2(0, 1) = \overline{\text{span}}(\{h_n : n \in \mathbb{N}\})$.

4:14 (*Banach-Saksin lause*) Olkoon E Hilbertin avaruus ja $(x_k) \subset E$ sellainen rajoitettu jono, että $(x_k | y) \rightarrow 0$ kun $k \rightarrow \infty$ kaikilla $y \in E$. Osoita, että on olemassa sellainen osajono $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$, että keskiarvot

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{k_j} \rightarrow \bar{0}, \quad n \rightarrow \infty.$$

[*Ohje*: Etsi induktiolla indeksit $k_1 < k_2 < \dots$ siten, että $|(x_{k_{j+1}} | x_{k_i})| < 1/j$ kun $i = 1, 2, \dots, j$ ja $j \in \mathbb{N}$, sekä kehitä $\|y_n\|^2$ auki sisätulon avulla.]

4:15 Olkoon Γ epätyhjä joukko ja $\ell^2(\Gamma)$ kaikkien kuvausten $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{K}$ muodostama vektoriavaruus, joille

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^2 < \infty.$$

(Tällöin joukko $\{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) \neq 0\}$ on numeroituva jokaisella $f \in \ell^2(\Gamma)$.) Näytä: (i) $(\ell^2(\Gamma), \|\cdot\|_2)$ on Hilbertin avaruus, (ii) $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ ei ole separoituva. [Vihje: tarkastele osajoukkoa $\{e_t : t \in \mathbb{R}\} \subset \ell^2(\mathbb{R})$, missä $e_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on määritelty ehdolla $e_t(t) = 1$ ja $e_t(s) = 0$ jos $s \neq t$.]

4:16 Normiavaruuden E konveksisuusmoduli on

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in E, \|x\| = 1 = \|y\|, \|x-y\| \geq \varepsilon \right\}$$

kun $0 < \varepsilon \leq 2$. Avaruus E on *tasaisesti konvekssi*, jos $\delta_E(\varepsilon) > 0$ kaikilla $0 < \varepsilon \leq 2$ (piirrä kuva!). Osoita, että jokainen Hilbertin avaruus H on tasaisesti konvekssi. [Vihje: arvioi $\delta_H(\varepsilon)$ alaspäin suunnikasyhtälön avulla]

4:17 Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ rajoitettu avoin joukko, $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ Lebesgue-mitallinen kuvaus,

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

sekä $f \in L^2(\Omega)$ annettu. Osoita, että on olemassa sellainen pieni $\delta_0 > 0$ että integraaliyhtälöllä

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $u \in L^2(\Omega)$ kaikilla luvuilla $\lambda \in \mathbf{C}$, joille $|\lambda| < \delta_0$.

[Ohje: tarkista Hölderin epäyhtälön avulla, että $u \mapsto \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy$ määrittelee rajoitetun operaattorin $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$. Sovella Banachin kiintopistelause kuvaukseen $\Phi(u)(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy$ avaruudessa $L^2(\Omega)$.]

5. FOURIER-SARJAT

Fourier esitti vuonna 1822 lämmönjohtamista koskevien tutkimusten yhteydessä kuuluisan menetelmänsä esittää mielivaltainen 2π -jaksollinen funktio kehittämänä

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + \dots$$

Tästä nousee useita tärkeitä kysymyksiä, esimerkiksi

- suppeneeko sarja kohti funktiota f ja missä mielessä suppeneminen tapahtuusi?

- Määrääkö Fourier-sarja funktion f yksikäsitteisesti ja miten kertoimet c_n kuvaavat funktion f ominaisuuksia?

Nämä kysymykset ovat olleet keskeisiä (koko) analyysin kehityksessä. Tutkimme seuraavaksi, mitä voidaan Hilbertin avaruus-metodeilla tässä tapauksessa saada aikaan.

Esitarkasteluja. Olkoon $L^2 = L^2(0, 2\pi) = L^2([0, 2\pi])$ ja $f \in L^2$. Jos $n \in \mathbb{Z}$, niin f :n n :s *Fourier kerroin* on mukavinta määritellä kaavalla

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

(Muistutus: $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ kun $n \in \mathbb{Z}$ ja $x \in [0, 2\pi]$, jolloin aina $|e^{inx}|^2 = \cos^2(nx) + \sin^2(nx) = 1$.) Esimerkiksi, jos

$$f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^N c_n (\cos(nx) + i \sin(nx)),$$

eli f on *trigonometrinen polynomi*, tällöin

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)x} dx = c_n$$

kun $n \in \{-N, \dots, N\}$, ja $\widehat{f}(n) = 0$ kun $|n| > N$, kuten edellä summauksen ja integroinnin järjestyksen vaihtamalla helposti huomaa.

Olkoon $(f | g) = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ sisätulo avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$. Fourier-kertoimet liittyvät näin ortonormaaliiin jonoon (Esimerkki 4.30.(2))

$$(5.1) \quad e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Nimittäin

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{e_n(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f | e_n).$$

(Huomaa erityisesti, että tässä määritelty Fourier kerroin $\widehat{f}(n)$ eroaa luvun 4 yleisestä määritelmästä 4.33 vakion $(2\pi)^{-1/2}$ verran.)

Jos $f \in L^2$ (tai jos $f \in L^p([0, 2\pi])$, $1 \leq p < \infty$), sen n :s *Fourier-osasumma* on

$$s_n(f; x) := \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in [0, 2\pi], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Huomaa, että summafunktio $s_n(f; x)$ on *pisteittäin* määritelty jatkuva funktio, koska funktio e^{ikx} on jatkuva kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

5.2. Lemma. *Fourier-osasummalla $s_n(f; \cdot)$ on integraaliesitys*

$$s_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt,$$

missä

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)}$$

on n :s Dirichlet'n ydin, kun $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Todistus. Fourier-kertoimen $\widehat{f}(n)$ määritelmän, integraalin linearisuuden sekä kaavan $e^{-ikt} e^{ikx} = e^{ik(x-t)}$ nojalla

$$\begin{aligned} s_n(f; x) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt, \end{aligned}$$

missä siis merkitään

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = e^{-inx} (1 + e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{i2nx}) = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} (e^{ix})^k.$$

(Muista, että $e^{ikx} = (e^{ix})^k$ kun $k \in \mathbb{Z}$ ja $x \in [0, 2\pi]$.) Soveltamalla (kompleksiarvoisen) geometrisen sarjan osasummakaavaa saadaan

$$D_n(x) = e^{-inx} \left(\frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) = \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

(Osasummakaava seuraa yhtälöstä $(1-z)(1+z+\dots+z^n) = 1 - z^{n+1}$ kun $z \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$.) Kertomalla tämä identiteetti puolittain termillä $e^{-ix/2}(e^{ix} - 1) = e^{ix/2} - e^{-ix/2}$, saadaan

$$(e^{ix/2} - e^{-ix/2}) D_n(x) = e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}.$$

Eulerin kaava $e^{iu} - e^{-iu} = 2i \sin u$ (missä $u \in \mathbb{R}$) antaa lopuksi

$$2i \sin(x/2) D_n(x) = 2i \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right).$$

□

L^2 -teoriassa tarvitaan lisäksi ns. *Fejérin ytimet*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x), \quad x \in [0, 2\pi], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

eli Dirichlet-ytimien aritmeettinen keskiarvo.

5.3. Lemma. *i) Kaikilla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ on voimassa*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(x) dx = \int_0^{2\pi} D_n(x) dx = 1.$$

ii) Funktio $K_n(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0, 2\pi]$, ja lisäksi

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos \delta)},$$

kun $0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta$. (Tässä $0 < \delta < \pi$ on kiinnitetty.)

Huomautus. Ominaisuus (ii) kertoo, että Fejérin ytimet K_n ovat positiivisia ja $K_n \rightarrow 0$ tasaisesti, kun $n \rightarrow \infty$, kunhan x ei ole lähellä päätepisteitä 0 tai 2π . Dirichlet-ytimillä D_n ei ole näitä ominaisuuksia. Tästä syystä Fourier-sarjojen *pisteittäisen* suppenemisen teoria on vaikeaa!

Todistus. (i) Koska $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} dt = \delta_{n,0}$, saadaan

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x) dx = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = 1$$

kaikilla $n = 0, 1, 2, \dots$. Siispä sama väite pitää paikkaansa Dirichlet-ytimien aritmeettiselle keskiarvolle K_n .

(ii) Lemman 5.2 todistuksessa osoitimme, että $(e^{ix} - 1)D_n(x) = e^{i(n+1)x} - e^{-inx}$. Tämän vuoksi

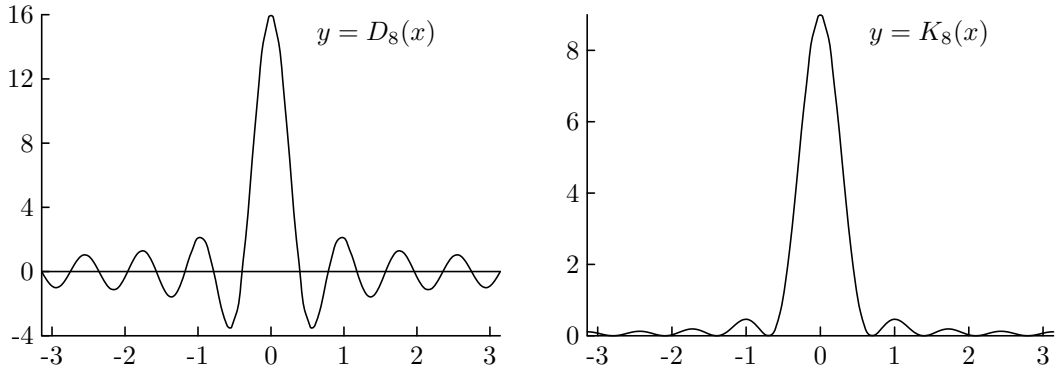
$$(n+1)K_n(x)(e^{ix} - 1)(e^{-ix} - 1) = (e^{-ix} - 1) \sum_{k=0}^n (e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}).$$

Yhtälön oikean puolen sarja on kahden geometrisen sarjan erotus, joten edelleen hieman sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned} (n+1)K_n(x)(e^{ix} - 1)(e^{-ix} - 1) &= (e^{-ix} - 1) \left(e^{ix} \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k - \sum_{k=0}^n (e^{-ix})^k \right) \\ &= \frac{e^{ix}(e^{-ix} - 1)}{e^{ix} - 1} (e^{i(n+1)x} - 1) - e^{-i(n+1)x} + 1 \\ &= (-e^{i(n+1)x} + 1) - e^{-i(n+1)x} + 1 = 2 - 2 \cos((n+1)x). \end{aligned}$$

Koska $(e^{ix} - 1)(e^{-ix} - 1) = 2(1 - \cos x)$, saamme lopuksi ratkaisemalla

$$K_n(x) = \frac{1 - \cos((n+1)x)}{(n+1)(1 - \cos x)} \geq 0.$$

KUVA 8. Dirichlet'n ja Fejérin ytimet ($n = 8$)

Huomaa, että koska $\cos(t) \leq 1$ kaikilla t , niin Fejérin ydin on tosiaankin positiivinen. Edelleen, Fejérin ytimelle löydetyistä esityksestä ja kosinin ominaisuuksista seuraa että

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos \delta)}$$

kun $0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta < 2\pi$. □

Seuraavaksi tutkimme Fejérin ytimien käyttäytymistä konvoluutioissa. Seuraava keskeinen tulos tunnetaan *Fejérin lauseen* nimellä.

5.4. Lause. *Olkoon $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva, $f(0) = f(2\pi)$, sekä*

$$K_n * f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) K_n(x-t) dt$$

kun $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Silloin

$$\|K_n * f - f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |K_n * f(x) - f(x)| \rightarrow 0,$$

*eli $K_n * f(x) \rightarrow f(x)$ tasaisesti välillä $[0, 2\pi]$, kun $n \rightarrow \infty$.*

Todistus. (vrt. Reaalianalyysi I) Oletuksen nojalla f on tasaisesti jatkuva ja se voidaan jatkaa 2π -periodisena koko reaalilukujen joukkoon \mathbb{R} . Myös K_n on 2π -periodinen ja jatkuva, joten havaitaan aluksi että muuttujanvaihtoa $u = x - t$ soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} K_n * f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) K_n(x-t) dt \stackrel{u=x-t}{=} \frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} f(x-u) K_n(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-u) K_n(u) du = f * K_n(x). \end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Koska f on tasaisesti jatkuva, niin löytyy sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x-u) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kaikilla $|u| < \delta$ ja $x \in [0, 2\pi]$. Merkitään

$$M = \|f\|_\infty = \sup_{u \in [0, 2\pi]} |f(u)| < \infty.$$

Lemman 5.3 kohdan *ii*) nojalla on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että

$$0 \leq K_n(u) < \frac{\varepsilon}{4M},$$

kun $\delta \leq u \leq 2\pi - \delta$ ja $n \geq n_0$. Lemman 5.3 kohdan *ii*) ja konvoluutiokaavan $K_n * f = f * K_n$ avulla saadaan nyt

$$\begin{aligned} |K_n * f(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x-u) - f(x)) K_n(u) du \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-u) - f(x)| K_n(u) du \\ &= \underbrace{\int_0^\delta \dots}_{=I_1} + \underbrace{\int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \dots}_{=I_2} \end{aligned}$$

Käsitlemme erikseen integroinnit yli edellä määrättyjen välien. Lemman 5.3 kohdan *i*), 2π -periodisuuden ja luvun δ valinnan nojalla

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^\delta |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^\delta K_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Termin I_2 tapauksessa

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_\delta^{2\pi-\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \\ &\leq 2 \left(\sup_{[0, 2\pi]} |f(x)| \right) \sup_{x \in [\delta, 2\pi-\delta]} K_n(x) \leq 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Siispä jokaisella $x \in [0, 2\pi]$ on voimassa $|K_n * f(x) - f(x)| \leq I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_0$, joten väite seuraa. \square

Huomautus. Lemmojen 5.2 ja 5.3 sekä integraalin lineaarisuuden nojalla saadaan

$$K_n * f(x) = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k \right) * f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k * f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(f; x)$$

kun $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Lauseen 5.4 perusteella siis jatkuvan 2π -periodisen funktion f Fourier-osasummien *aritmeettinen keskiarvo* suppenee tasaisesti kohti f :ää välillä $[0, 2\pi]$ ja siten myös *pisteittäin* kaikilla $x \in [0, 2\pi]$.

Seurauksena tästä saadaan tärkeä yksikäsitteisyysominaisuus.

5.5. Seuraus. Jos $f \in C(0, 2\pi)$ on 2π -periodinen (eli $f(0) = f(2\pi)$) ja $\widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $f \equiv 0$.

Todistus. Jos $\widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $s_n(f; x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in [0, 2\pi]$. Lauseen 5.4 jälkeisen huomautuksen nojalla $f(x) = \lim_n K_n * f(x) = 0$ kaikilla $x \in [0, 2\pi]$. \square

Siis jatkuvien funktioiden tapauksessa Fourier-kertoimet määräävät funktion yksikäsitteisesti, eli jos f ja g ovat jatkuvia ja 2π -periodisia, sekä $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $f = g$.

Tavoitteenamme on laajentaa em. yksikäsitteisyystulosta L^2 -funktioille. Tätä varten todistamme seuraavan keskeisen approksimaatiotuloksen L^p -funktioille.⁵ Tämä tulos kertoo sen, että sileät funktiot ovat tiheässä avaruudessa $L^p([0, 2\pi])$, kun $p \neq \infty$.

5.6. Lause. *Olkoon $f \in L^p([0, 2\pi])$, missä $1 \leq p < \infty$, ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa 2π -periodinen C^∞ -funktio g , jolle*

$$(A) \quad \|f - g\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Todistus. Havaitaan aluksi, että $K_n * g$ on aina C^∞ -funktio, sillä se on Lauseen 5.4 jälkeisen huomautuksen nojalla äärellinen summa trigonometrisistä funktioista, jotka ovat C^∞ -funktioita.

Lauseen 5.4 nojalla riittää siis löytää *jatkuva* 2π -periodinen funktio g , jolle (A) on voimassa, sillä tällöin

$$\|f - K_n * g\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - K_n * g\|_p,$$

missä

$$\|g - K_n * g\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |g(x) - K_n * g(x)| dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|g - K_n * g\|_\infty \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. (Edellä vakio $c = (2\pi)^{1/p}$.)

Etsitään haluttu jatkuva funktio g ”asteittain”:

(1) Olkoon $f = \chi_F$ suljetun joukon $F \subset [0, 2\pi]$ karakteristinen funktio. Asetetaan

$$g_n(x) = \frac{1}{1 + n \operatorname{dist}(x, F)}, \quad \text{kun } x \in [0, 2\pi] \text{ ja } n \in \mathbb{N}.$$

Etäisyysfunktio $x \mapsto \operatorname{dist}(x, F)$ on jatkuva (tarkista!), joten $g_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi $g_n(x) = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, jos $x \in F$ ja $g_n(x) \rightarrow 0$, kun $x \notin F$ ja $n \rightarrow \infty$, sillä tällöin $\operatorname{dist}(x, F) > 0$. Siis $g_n \rightarrow \chi_F$

⁵Vertaa myös kurssi *Reaalianalyysi I*

pisteittäin, kun $n \rightarrow \infty$. Koska $0 \leq g_n(x) \leq 1$ kaikilla $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen nojalla,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - \chi_F\|_p^p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |g_n(x) - \chi_F(x)|^p dx \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} |g_n(x) - \chi_F(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

Lopuksi, muuttamalla tarvittaessa funktiota g_n pienessä välissä $[0, \frac{1}{n}]$ voi olettaa että $g_n(0) = g_n(2\pi)$. Esimerkiksi, jos \tilde{g}_n on välillä $[0, \frac{1}{n}]$ lineaarinen funktio jolle $\tilde{g}_n(0) = g_n(2\pi)$ ja $\tilde{g}_n(\frac{1}{n}) = g_n(\frac{1}{n})$, niin näin syntyvä ”lisävirhe” on

$$\|g_n - \tilde{g}_n\|_p^p = \int_0^{1/n} |g_n(t) - \tilde{g}_n(t)|^p dt \leq \frac{1}{n}.$$

tähän tulee kuva!!

(2) Olkoon $f = \chi_A$ avoimen joukon $A \subset [0, 2\pi]$ karakteristinen funktio. Tällöin väite seuraa kohdasta (1), koska komplementti $A^c = [0, 2\pi] \setminus A$ on suljettu ja $\chi_A = 1 - \chi_{A^c}$.

(3) Olkoon $f = \chi_A$, kun $A \subset [0, 2\pi]$ Lebesgue-mitallinen joukko. Tällöin Lebesguen (ulko)mitan määritelmän nojalla löytyy sellainen jono avoimia joukkoja $G_n \subset [0, 2\pi]$, että

$$G_n \supset A \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n \setminus A) = 0,$$

kun μ on Lebesguen mitta. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n \in \mathbb{N}$ niin suureksi, että $\mu(G_n \setminus A) < (\varepsilon/2)^p$. Kohdan (2) nojalla löytyy sellainen jatkuva 2π -periodinen funktio g , jolle $\|g - \chi_{G_n}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Siispä

$$\|g - \chi_A\|_p \leq \|g - \chi_{G_n}\|_p + \|\chi_{G_n} - \chi_A\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(G_n \setminus A)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(4) Olkoon $f \in L^p([0, 2\pi])$ mielivaltainen. Lebesguen integraalin $\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt$ määritelmän nojalla löytyy sellainen yksinkertainen mitallinen funktio

$$g = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j},$$

että $\|f - g\|_p < \varepsilon$, missä $A_1, \dots, A_n \subset [0, 2\pi]$ ovat mitallisia joukkoja. Soveltamalla kohtaa (3) kuhunkin karakteristiseen funktioon χ_{A_j} löydetään sellainen jatkuvat 2π -periodiset funktiot g_j , että

$$\|\chi_{A_j} - g_j\|_p < \frac{\varepsilon}{nM},$$

missä $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. Siispä kolmioepäytälön nojalla

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{j=1}^n a_j g_j \right\|_p &\leq \|f - g\|_p + \left\| \sum_{j=1}^n a_j (\chi_{A_j} - g_j) \right\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + \sum_{j=1}^n |a_j| \|g_j - \chi_{A_j}\|_p \\ &< \varepsilon + \sum_{j=1}^n |a_j| \frac{\varepsilon}{nM} \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Koska $\sum_{j=1}^n a_j g_j$ on myös 2π -periodinen jatkuva funktio, väite seuraa. \square

5.7. *Huomautus.* (1) Lause 5.6 ei päde tapauksessa $p = \infty$, koska $C(0, 2\pi)$ ei ole edes tiheä avaruudessa $(L^\infty([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty)$ (vrt. harjoitus 3:8).

(2) Lauseen 5.6 nojalla sileiden C^∞ -funktioiden muodostama aliavaruus on tiheä myös avaruudessa $L^p(a, b)$, kun $a < b$ ja $1 \leq p < \infty$, mikä seuraa lineaarisesta "muuttujanvaihdosta" $[a, b] \rightarrow [0, 2\pi]$.

(3) Jos $f \in L^p(\mathbb{R})$, kun $1 \leq p < \infty$ ja $\varepsilon > 0$, niin on olemassa (dominoidun konvergenssin perusteella) sellainen $M < \infty$, että

$$\int_{J_M} |f(x)|^p dx < \varepsilon,$$

kun $J_M = \{x \in \mathbb{R} : |x| > M\}$. Tästä voidaan päätellä, että vektorialiavaruus $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$, kun $1 \leq p < \infty$ (vapaa HT).

(4) Jos $\Omega \subset \mathbb{R}$ on mitallinen, $\mu(\Omega) > 0$ ja $f \in L^p(\Omega)$, niin asetetaan

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, \end{cases}$$

jolloin $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$. Tämän avulla voidaan päätellä, että $C^\infty|_\Omega \cap L^p(\Omega)$ on tiheä avaruudessa $L^p(\Omega)$, kun $1 \leq p < \infty$, missä $C^\infty|_\Omega = \{f|_\Omega : f \in C^\infty(\mathbb{R})\}$.

(5) Voidaan myös osoittaa, että p -integroituvat $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -funktioit muodostavat tiheän aliavaruuden avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$), katso *Reaalianalyysi I*, luku 2.4. (n -ulotteinen tapaus on vähän hankalampi, koska käytimme edellä hyväksi Fejérin ytimien $K_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k$ erikoisominaisuuksia).

Seurauksena saadaan yksikäsitteisyys myös L^2 -funktioiden Fourier-sarjoille:

5.8. **Seuraus.** Jos $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = 0 \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{Z},$$

niin $f = \bar{0}$. Siis: jos $f, g \in L^2$ ja $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $f = g$.

Erityisesti, jos

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in [0, 2\pi], \quad n \in \mathbb{Z},$$

niin $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa L^2 .

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Approksimaatiolauseen 5.6 nojalla on olemassa sellainen jatkuva 2π -periodinen $g \in C(0, 2\pi)$, että $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.

Fejérin lauseen 5.4 sivulla 92 mukaan konvoluutio $K_n * g \rightarrow g$ tasaisesti välillä $[0, 2\pi]$, kun $n \rightarrow \infty$, joten

$$\|g - K_n * g\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|g - K_n * g\|_\infty < \varepsilon$$

kun $n \in \mathbb{N}$ on riittävän iso. Sivun 93 huomautuksen nojalla

$$K_n * g = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(f, \cdot) = \sum_{k=-n}^n a_k e_k \quad (\text{trigonometrinen polynomi}),$$

missä $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$. Koska $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ortonormaali jono, niin Huomautuksen 4.36 sivulla 77 nojalla vastaava ortoprojektio minimoi etäisyyden aliavaruuteen $\text{span}(\{e_k : -n \leq k \leq n\})$, eli

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^n (f | e_k) e_k \right\|_2 \leq \left\| f - \sum_{k=-n}^n a_k e_k \right\|_2.$$

Toisaalta, oletuksen nojalla $(f | e_k) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, joten kolmioepäyhtälön perusteella

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \left\| f - \sum_{k=-n}^n (f | e_k) e_k \right\|_2 \leq \left\| f - K_n * g \right\|_2 \\ &\leq \|f - g\|_2 + \left\| g - K_n * g \right\|_2 < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, niin $f = \bar{0}$.

Lauseen 4.40 sivulla 79 ehdon b) nojalla jono $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$. □

YHTEENVETO (FOURIER-SARJOJEN L^2 -TEORIASTA)

Kokoamme lyhyesti saamamme tulokset Fourier-sarjojen L^2 -teoriasta.

- 1.) Jos $e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, niin $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ on ortonormaali jono avaruudessa L^2 .
- 2.) Jos $f \in L^2$ ja $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f | e_n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin $f = \bar{0}$. (Seuraus 5.8) Siis $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa L^2 .
- 3.) Jos $f \in L^2$, niin

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f | e_n) e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx},$$

missä sarja suppenee L^2 -mielessä. Konkreettisesti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \right|^2 dx = 0.$$

(Lause 4.40 sivulla 79 ja Seuraus 5.8, koska $(f | e_n) e_n(x) = \widehat{f}(n) e^{inx}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ ja $x \in [0, 2\pi]$.)

- 4.) Parsevalin identiteetin eli Lauseen 4.40 sivulla 79 kohdan d) nojalla

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2, \quad \text{kun } f \in L^2,$$

koska $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f | e_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

- 5.) Kääntäen, jos $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, niin tällöin on olemassa $f \in L^2(0, 2\pi)$, jolle

$$\widehat{f}(k) = \lambda_k \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{Z}.$$

Tämä on Riesz–Fischerin lause eli Seuraus 4.38 sivulla 79. (Edellä $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{ikt}$ on haluttu funktio.)

- 6.) Plancherelin kaavan Lauseen 4.40 sivulla 79 kohdan e) nojalla kaikilla $f, g \in L^2$ pätee

$$\frac{1}{2\pi} (f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \overline{g(s)} ds = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)}.$$

Pisteittäisen suppenemisen teoriasta mainitsemme seuraavan sovelluksen, joka toimii esimerkiksi jatkuvasti derivoituville funktioille.

5.9. Lause. Jos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on 2π -periodinen ja toteuttaa Lipschitz-ehdon $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, niin funktion f Fourier osasummat

$$s_n(f; x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \rightarrow f(x), \quad \text{kun } n \rightarrow \infty,$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. (ei todistettu luennoilla vuonna 2010) Jos $h \in L^2$, niin Besselin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h(t) \cos(nt) dt &= \frac{1}{2} ((h | e^{in\cdot}) + (h | e^{-in\cdot})) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} ((h | e_n) + (h | e_{-n})) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$. Samoin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} h(t) \sin(nt) dt = 0.$$

Valitaan nyt

$$h_x(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)}.$$

Tällöin Lipschitz-ehdon nojalla funktio $h_x \in L^\infty([0, 2\pi]) \subset L^2([0, 2\pi])$, koska $|h_x(t)| \leq L \frac{|t|}{|\sin(t/2)|} \rightarrow 2L$ kun $t \rightarrow 0+$. Lemman 5.2 nojalla

$$\begin{aligned} s_n(f; x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x-t) f(t) dt - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(t) f(x-t) dt - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(t) (f(x-t) - f(x)) dt. \end{aligned}$$

Toinen identiteeteistä seuraa Lauseen 5.4 sivulla 92 todistuksessa olevasta konvoluutiokaavasta ja viimeinen siitä, että Lemman 5.3 sivulla 91 nojalla Dirichletin ytimen integraali $\frac{1}{2\pi} \int D_n(t) dt = 1$. Koska

$$D_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} = \cos(nt) + \frac{\sin(nt) \cos(t/2)}{\sin(t/2)},$$

niin yhdistämällä edellisiä identiteettejä saadaan

$$\begin{aligned} s_n(f; x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt) (f(x-t) - f(x)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_x(t) \cos(t/2) \sin(nt) dt. \end{aligned}$$

Koska kiinteällä $x \in \mathbb{R}$ funktiot $f(x - \cdot) - f(x) \in L^2$ ja $h_x(t) \cos(t/2) \in L^2$, niin todistuksen alkuosan raja-arvokaavojen perusteella siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n(f; x) - f(x)| = 0.$$

□

SOBOLEV-AVARUUDET

Olkoon $f \in C^1(0, 2\pi)$ jatkuvasti derivoituva, $f(0) = f(2\pi)$. Tällöin osittais-integroinnilla saadaan

$$\widehat{(f')}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} + \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} dt = ik\widehat{f}(k),$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Parsevalin identiteetin (Lause 4.40 sivulla 79) nojalla saadaan

$$(5.10) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(t)|^2 + |f'(t)|^2) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2) |\widehat{f}(k)|^2.$$

Riesz–Fischerin lause (Seuraus 4.38 sivulla 79) vihjaa, että kaava (5.10) voisi olla voimassa yleisemmille funktioille f ja että on olemassa avaruuden L^2 vastine derivoituville funktioille; siis avaruus, joka koostuu funktioista $f \in L^2$, joille myös $f' \in L^2$. Tämä johtaa seuraavaan pulmaan.

Ongelma. Mikä on ”derivaatta” f' , jos $f \in L^2$?

Tarkastellaan aluksi *testifunktioiden* avaruutta $\mathcal{D}(\Omega)$, missä $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ on avoin väli (voi olla $\Omega = \mathbb{R}$). Palautetataan mieleen, että jos $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\text{supp}(\psi) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \psi(x) \neq 0\}}$$

on funktion ψ *kantaja*. Asetetaan nyt

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \text{supp}(\psi) \subset \Omega \text{ on kompakti} \}$$

(Muistutus: Heine-Borelin lauseen nojalla (Väisälä: *Topologia I*, 13.14) kantaja $\text{supp}(\psi)$ on siis suljettu ja rajoitettu joukko \mathbb{R} :ssä).

Huomautus. Jos $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, niin sen derivaatat $\psi^{(k)} \in \mathcal{D}(\Omega)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Olkoon Ω avoin väli ja $f \in C^1(\Omega)$ jatkuvasti derivoituva. Tällöin osittais-integroimalla saadaan

$$(5.11) \quad \int_{\Omega} f' \varphi dx = - \int_{\Omega} f \varphi' dx \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Edellisessä kaavassa ei ole sijoitustermiä, sillä testifunktio φ häviää joukon Ω reunalla. Kaavan (5.11) avulla voimme siis yrittää samaistaa derivaatan f' ja sitä vastaavan *lineaarikuvauksen*

$$\varphi \mapsto - \int_{\Omega} f(x) \varphi'(x) dx,$$

missä $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ja $f \in C^1(\Omega)$. Otamme tämän havainnon lähtökohdaksi *heikon* derivaatan määritelmässä.

5.12. **Määritelmä.** Olkoon $\Omega = (a, b)$ avoin väli ja $f \in L^2(\Omega)$. Funktio $g \in L^2(\Omega)$ on f :n *heikko* derivaatta (eli *yleistetty* derivaatta tai *distributioderivaatta*), jos

$$\int_{\Omega} g \varphi \, dx = - \int_{\Omega} f \varphi' \, dx \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Jos f :lla on heikko derivaatta g , niin merkitään edelleen $g = f'$.

Osoitamme seuraavaksi, että funktion $f \in L^2(\Omega)$ heikko derivaatta on yksikäsitteinen (jos se on olemassa), sekä jos $f \in C^1(\Omega)$ niin heikko derivaatta samaistuu L^2 -mielessä tavallisen derivaatan f' kanssa (toki edellyttäen että $f' \in L^2(\Omega)$).

5.13. **Lemma.** *Olkoon $f \in L^2(\Omega)$ ja Ω rajoitettu avoin väli. Jos $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$ toteuttavat ehdot*

$$(5.14) \quad \int_{\Omega} g_1 \varphi \, dx = - \int_{\Omega} f \varphi' \, dx = \int_{\Omega} g_2 \varphi \, dx \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

niin $g_1 = g_2$.

Erytisesti, jos $f \in C^1(\Omega)$ on jatkuvasti derivoituva ja $f' \in L^2(\Omega)$, niin silloin tavallinen derivaatta f' on myös funktion f heikko derivaatta.

Todistus. Oletuksesta (5.14) ja integraalin lineaarisuudesta seuraa, että

$$\int_{\Omega} (g_1 - g_2) \varphi \, dx = 0 \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tällöin $(g_1 - g_2) \perp \mathcal{D}(\Omega)$ avaruudessa $L^2(\Omega)$, missä $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ on vektorialiavaruus. Riittää siis näyttää, että $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ normin $\|\cdot\|_2$ suhteen, sillä tällöin testifunktioiden ortokomplementti $\mathcal{D}(\Omega)^\perp = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^\perp = \{\bar{0}\}$, joten $g_1 = g_2$ avaruuden $L^2(\Omega)$ alkioina.

Koska Ω on rajoitettu väli, niin Lauseen 5.6 sivulla 94 perusteella tiedämme että $\overline{C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$. Tämän tiedon nojalla riittääkin todistaa, että $C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega) \subset \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$ avaruudessa $L^2(\Omega)$.

Olkoon $\Omega = (0, 1)$ (yleinen tapaus $\Omega = (a, b)$ palautetaan tähän lineaarisella muunnoksella). Todetaan ensin, että kiinteällä $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ on olemassa funktio $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, jolle pätee

1. $0 \leq \eta_\varepsilon(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \Omega$,
2. nollan ja ykkösen ympäristöissä funktio η_ε on identtisesti nolla, eli $\eta_\varepsilon(x) \equiv 0$, kun $0 < x < \varepsilon$ tai $1 - \varepsilon < x < 1$,
3. funktio $\eta_\varepsilon(x) \equiv 1$ kaikilla $2\varepsilon < x < 1 - 2\varepsilon$.

Sellaisen funktion tarkka konstruointi jätetään harjoitustehtäväksi (HT 5:5). (Kannattaa lähteä liikkeelle tiedosta, että

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

on C^∞ -funktio, vrt. *Reaalianalyysi I*.)

Jos $f_0 \in C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ on mielivaltainen, niin selvästi $\eta_\varepsilon f_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$. Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\|f_0 - \eta_\varepsilon f_0\|_2^2 = \int_0^1 |1 - \eta_\varepsilon(x)|^2 |f_0(x)|^2 dx \rightarrow 0,$$

kun $\varepsilon \rightarrow 0^+$. (Tarkasti ottaen: LDK pitää edellä soveltaa mielivaltaisella positiivisella jonolla (ε_k) , jolle $\lim_k \varepsilon_k = 0$.) Siispä $C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega) \subset \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$ avaruudessa $L^2(\Omega)$, joten lauseen ensimmäinen väite on todistettu.

Jos $f \in C^1(\Omega)$ ja $f' \in L^2(\Omega)$, niin kaavasta (5.11) ja yksikäsitteisyydestä seuraa, että f' on heikko derivaatta f :lle (L^2 -mielessä). \square

5.15. *Huomautus*. Lemman 5.13 todistus perustuu Lauseeseen 5.6 sivulla 94, ja siten välin Ω on oltava rajoitettu. Jos $\Omega \subset \mathbb{R}$ on rajoittamaton avoin väli, niin tämä tekninen rajoitus voidaan helposti kiertää soveltamalla Lemman tulosta sellaisiin avoimiin rajoitettuihin väleihin $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega$, että $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$.

Huomautus (Lisätieto). Yllä olevien heikkojen derivaattojen tarkastelu johtaa *distribuuutioihin* (eli yleistettyihin funktioihin). Näihin joudutaan (esimerkiksi) seuraavista luontevista vaatimuksista:

- (a) jokainen jatkuva funktio on distribuutio,
- (b) jokaisella distribuutioilla on *kaikkien* kertalukujen derivaatat, jotka ovat edelleen distribuutioita. Jos $f \in C^1$, niin sen derivaatta ”distribuutiona” on tavallinen derivaatta f' .
- (c) derivaatan tavallisten laskusääntöjen tulee olla voimassa (distribuutioiden *tulo* on ongelma!).
- (d) distribuutioilla tulee olla riittävän hyviä suppenemisominaisuuksia (rajaprosesseja varten).

Itse asiassa, *distribuuutio* määritellään lineaarikuvauksena $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$. Jokainen jatkuva $f \in C(\Omega)$ määrää lineaarikuvauksen $\Lambda_f: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ ehdolla $\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi dx$, kun $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (siis (a) on voimassa). Jos määrittelemme kaavan (5.11) sivulla 100 motivoimana:

$$\Lambda'(\varphi) = -\Lambda(\varphi'), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

niin ehdot (b) ja (c) tulevat täytetyiksi. Kohtaa (d) varten testifunktioiden avaruus $\mathcal{D}(\Omega)$ pitää lisäksi varustaa sopivalla topologialla τ , jolloin distribuutiot ovat tarkalleen *jatkuvat* lineaarikuvaukset $(\mathcal{D}(\Omega), \tau) \rightarrow \mathbb{K}$. Tämän topologian määrittely sekä karakterisointi vaatii lisätyötä, joten se sivuutetaan tällä kursilla.⁶

5.16. **Esimerkki.** Olkoon $\Omega = (-1, 1)$ ja

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Heavisiden funktio}).$$

Tällöin $H \in L^2(\Omega)$, mutta kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pätee

$$-\int_{-1}^1 \varphi'(x)H(x) dx = -\int_0^1 \varphi'(x) dx = \varphi(0) - \underbrace{\varphi(1)}_{=0} = -\varphi(0).$$

Toisaalta: koska $H'(x) = 0$ tavallisessa mielessä kun $x \neq 0$, niin ei ole olemassa funktiota $g \in L^2(\Omega)$, jolle samalla myös

$$\int_{\Omega} g(x)\varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(Vrt. myös Lemmaa 5.13.)

Huomautus. Heavisiden funktion H derivaatta ”distribuutiona” on ns. *Diracin deltafunktionaali* δ , jolle

$$\delta(x) = 0 \text{ kun } x \neq 0 \text{ ja } \int_{\Omega} \delta(x) dx = 1.$$

Tällöin δ ei voi olla tavallinen funktio, vaan se on *aito distribuutio*; itse asiassa δ on lineaarikuvaukset $\varphi \mapsto \varphi(0) : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$. [Huomaa myös, että edellisessä esimerkissä heikko derivaatta on **eri asia** kuin derivaatta ”distribuutiona”.]

5.17. **Määritelmä.** Olkoon $\Omega = (a, b)$ avoin väli. *Sobolev-avaruus* $H^1 = H^1(\Omega)$ koostuu niistä L^2 -funktioista f , joilla on heikko derivaatta $f' \in L^2$ eli

$$H^1 = \{ f \in L^2(\Omega) : \text{funktioilla } f \text{ on heikko derivaatta } f' \in L^2(\Omega) \}.$$

Merkintä H^1 viittaa derivaatan kertalukuun ja H Hilbertin avaruuteen. Usein merkitään myös $H^1 = W_2^1 = W^{1,2}$.

5.18. **Lause.** H^1 on Hilbert-avaruus varustettuna sisätulolla

$$(f | h) = \int_{\Omega} [f(x)\overline{h(x)} + f'(x)\overline{h'(x)}] dx, \quad f, h \in H^1.$$

⁶katso esimerkiksi Walter Rudin: ”Functional Analysis”.

Todistus. Avaruuden H^1 määritelmän ja Cauchy–Schwarzin epäyhtälön 4.2 sivulla 62 nojalla muoto $(f, h) \mapsto (f | h)$ on hyvin määritelty, sillä funktiot $f, h, f', h' \in L^2(\Omega)$. Lisäksi

$$\begin{aligned} \|f - h\|_{H^1}^2 &= \int_{\Omega} [(f(x) - h(x))(\overline{f(x) - h(x)}) + \underbrace{(f - h)'(x)}_{=f'(x)-h'(x)} \overline{(f - h)'(x)}] dx \\ &= \|f - h\|_{L^2}^2 + \|f' - h'\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

kaikilla $f, h \in H^1$. Edellä $(f - h)' = f' - h'$ yksikäsitteisyyden nojalla (Lemma 5.13), koska

$$\int_{\Omega} (f' - h')\phi dx = \int_{\Omega} f'\phi dx - \int_{\Omega} h'\phi dx = \int_{\Omega} (f - h)\phi' dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Jos $(f_n) \subset H^1$ on Cauchyn jono, niin jonot $(f_n) \subset L^2(\Omega)$ ja $(f'_n) \subset L^2(\Omega)$ ovat myös Cauchyn jonoja. Koska $L^2(\Omega)$ on täydellinen, niin löytyy sellaiset $f, g \in L^2(\Omega)$, että $f_n \rightarrow f$ ja $f'_n \rightarrow g$ avaruudessa $L^2(\Omega)$. Riittää siis näyttää, että g on funktion f heikko derivaatta, eli $g = f'$.

Jos $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, niin

$$\int_{\Omega} f_n \varphi' dx = - \int_{\Omega} f'_n \varphi dx$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f \varphi' dx + \int_{\Omega} g \varphi dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (f - f_n) \varphi' dx + \int_{\Omega} (g - f'_n) \varphi dx \right| \\ &\leq \|f - f_n\|_{L^2} \|\varphi'\|_{L^2} + \|g - f'_n\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$. Siis

$$\int_{\Omega} g \varphi dx = - \int_{\Omega} f \varphi' dx \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

eli $f' = g \in L^2(\Omega)$. □

Tarvitsemme allaolevassa sovelluksessa Sturm-Liouvillen ongelmaan (Lause 5.25) joitakin Sobolev-funktioiden perusominaisuuksia. Aluksi osoitetaan seuraava versio analyysin peruslauseesta heikoille derivaatoille.

Huom.: sivujen 104 - 113 väliset todistukset ei käy läpi luennoilla vuonna 2010

5.19. Lemma. *Jos $f \in L^2(\Omega)$ ja $\int_{\Omega} f \varphi' dx = 0$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (eli siis heikko derivaatta $f' = \bar{0}$), niin $f(x) \equiv C$ (vakio) m.k. $x \in \Omega$, toisin sanoen, on olemassa vakio C jolle joukko $\{x \in \Omega : f(x) \neq C\}$ on 0-mittainen.*

Todistus. Olkoon $\Omega = (a, b)$. Kinnitetään funktio $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ jolle $\int_{\Omega} \psi \, dx = 1$. Jos $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ on mielivaltainen, niin asetetaan

$$\varphi(x) = \int_a^x \left(w(t) - \left(\int_{\Omega} w(y) \, dy \right) \psi(t) \right) dt.$$

Tällöin $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Tämän havaitsemiseksi lasketaan ensin funktion φ derivaatta, joka on $\varphi'(t) = w(t) - \left(\int_{\Omega} w \, dx \right) \psi(t)$. Olkoon nyt väli $[c, d] \subset \Omega = (a, b)$ sellainen, että $\text{supp}(\psi) \cup \text{supp}(w) \subset [c, d]$. Silloin kaikilla $c' \in [a, c]$ pätee $\varphi(c') = 0$ ja kaikilla $d' \in [d, b]$ lisäksi

$$\begin{aligned} \varphi(d') - \varphi(c') &= \int_{c'}^{d'} \varphi'(t) \, dt = \int_{c'}^{d'} \left(w(t) - \left(\int_{\Omega} w \, dx \right) \psi(t) \right) dt \\ &= \int_{\Omega} w(t) \, dt - \int_{\Omega} \psi(t) \, dt \cdot \int_{\Omega} w(x) \, dx = 0, \end{aligned}$$

sillä $\int \psi \, dx = 1$. Siispä $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega$ on kompakti.

Oletuksen ja Fubinin lauseen⁷ nojalla on siis

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} f \varphi' \, dx = \int_{\Omega} f(t) \left(w(t) - \left(\int_{\Omega} w \, dx \right) \psi(t) \right) dt \\ &= \int_{\Omega} w(x) \left(f(x) - \int_{\Omega} f(t) \psi(t) \, dt \right) dx. \end{aligned}$$

Koska $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ on mielivaltainen ja $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ (Lauseen 5.13:n todistus), niin tästä seuraa, että

$$f(x) - \underbrace{\int_{\Omega} f \psi \, dt}_{=C=\text{vakio}} = 0 \quad \text{m.k. } x \in \Omega.$$

□

Määritelmän perusteella $f \in L^2(\Omega)$ ja heikko derivaatta $f' \in L^2(\Omega)$ kun $f \in H^1(\Omega)$. Analyysin peruslauseen (Lemma 5.19) avulla voimme osoittaa, että Sobolev-funktiot $f \in H^1(\Omega)$ ovatkin hieman sileitä myös tavallisessa mielessä. Tarkemmin sanoen seuraava tulos on voimassa. (Tämä on erikoistapaus yleisemmästä Sobolevin upotuslauseesta.)

5.20. Lause. *Jos $\Omega = (a, b)$ on rajoitettu väli, $f \in H^1(a, b)$ ja $f' \in L^2(\Omega)$ on sen heikko derivaatta, niin*

(a) *on olemassa (tasaisesti) jatkuva $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$, jolle $\tilde{f}(x) = f(x)$ m.k. $x \in \Omega$, eli funktion f määräämä L^2 -luokka sisältää jatkuvan edustajan \tilde{f} .*

(b)

$$f(x) = \int_{x_0}^x f'(t) \, dt + f(x_0) \quad \text{m.k. } x, x_0 \in (a, b).$$

⁷integroimisjärjestyksen vaihto, kts. *Mitta ja integraali* kurssi

Huomautus. (1) Ominaisuus ”on olemassa jatkuva edustaja” on vahvempi kuin ominaisuus ”m.k. jatkuva”. Esimerkiksi välin $[0, 1]$ karakteristinen funktio $\chi_{[0,1]}$ on jatkuva m.k. $x \in \mathbb{R}$, mutta ei ole olemassa sitä vastaavaa jatkuvaa edustajaa. (2) Jos f on jatkuva funktio, jolle löytyy tavallisessa mielessä $f'(x)$ m.k. $x \in \Omega$ ja $f' \in L^2(\Omega)$, niin tällöin (b) ei aina päde (*Reaalianalyysi I*: on olemassa jatkuva ns. Cantorin funktio $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, jolle $f'(x) = 0$ m.k. $x \in [0, 1]$, sekä $f(0) = 0, f(1) = 1$).

Lauseen 5.20 todistus. Voidaan vapaasti olettaa, että $(a, b) = (0, 1)$. Olkoon $x_0 \in (0, 1)$. Määritellään funktio

$$h(x) = \int_{x_0}^x f'(t) dt,$$

joka on hyvin määritelty, koska $f' \in L^2(0, 1) \subset L^1(0, 1)$ Schwarzin tai Hölderin epäyhtälön nojalla. (Tässä kohdassa tarvitaan, että väli Ω on rajoitettu.) Jos $x, y \in (0, 1)$ ja $x < y$, niin Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= \left| \int_{x_0}^x f'(t) dt - \int_{x_0}^y f'(t) dt \right| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \\ &\leq \left(\int_x^y |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_x^y 1 dt \right)^{\frac{1}{2}}}_{=|y-x|^{\frac{1}{2}}} \leq \|f\|_{H^1} |x - y|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

eli h on tasaisesti jatkuva $(0, 1) \rightarrow \mathbb{K}$ ja siten myös jatkuva välillä $[0, 1]$.

Väite: $f(x) - h(x) = C$ (vakio) m.k. $x \in (0, 1)$ (*Huom:* kohdat (a) ja (b) seuraavat heti tästä).

Voidaan olettaa edellä merkintöjen helpottamiseksi että $x_0 = 0$. Olkoon $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$ mielivaltainen. Fubinin lauseen, heikon derivaatan määritelmän sekä $\varphi(1) = 0$, avulla saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi'(x) h(x) dx &= \int_0^1 \varphi'(x) \left(\int_0^x f'(t) dt \right) dx \\ &\stackrel{\text{Fub.}}{=} \int_0^1 f'(t) \underbrace{\left(\int_t^1 \varphi'(x) dx \right)}_{=\varphi(1) - \varphi(t) = -\varphi(t)} dt = - \int_0^1 f'(t) \varphi(t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) \varphi'(t) dt, \end{aligned}$$

joten

$$\int_0^1 \varphi'(t) (h(t) - f(t)) dt = 0$$

kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$. Siispä Lemman 5.19 nojalla $f(x) - h(x) \equiv C$ m.k. $x \in (0, 1)$. (Perustele itsellesi miten edellä Fubinin lausetta käytetään, kun integroimisjoukkona on

$$A = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq x\} = \{(x, t) : 0 \leq t \leq 1, t \leq x \leq 1\}.$$

□

Seuraavassa oletetaan aina, että Sobolev-funktio $f \in H^1(a, b)$ on jatkuva (siis edustajana Lauseen 5.20.(a) mielessä) ja erityisesti

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{ja} \quad f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

ovat olemassa (katso Lauseen 5.20 todistus). Siis tässä mielessä

$$H^1(a, b) \subset C(a, b) (= \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ on jatkuva}\}).$$

Kirjoitetaan näkyviin pari seurausta Lauseelle 5.20.

5.21. Seuraus. Jos $f \in H^1(a, b)$ ja heikko derivaatta $f' \in C(a, b)$, niin $f \in C^1(a, b)$.

Todistus. Lauseen 5.20 ja derivaatan f' jatkuvuuden nojalla

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

kaikilla $x_0, x \in [a, b]$.

□

5.22. Seuraus. Joukko $H_0^1(a, b) = \{f \in H^1(a, b) : f(a) = f(b) = 0\}$ on avaruuden $H^1(a, b)$ suljettu aliavaruus (ja siten Hilbert avaruus).

Todistus. HT 5:9.

□

Huomautus. (1) Koska avaruuden H^1 funktiot ovat jatkuvia, niin 2π -periodisessa tapauksessa $H^1(0, 2\pi)$ voidaan karakterisoida Fourier-kertoimien avulla: eli funktio $f \in H^1(0, 2\pi)$ ja $f(0) = f(2\pi)$ jos ja vain jos

$$f \in L^2(0, 2\pi) \quad \text{ja} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2) |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Tämä seuraa sivulla 100 olevasta johdantotekstistä Sobolev-avaruuksiin, kun lisäksi yhdistämme tähän päättelyyn HT:ssa 5:7 osoitettua tulosta.

(2) Sobolev-avaruudet voidaan rakentaa korkeammissakin dimensioissa ja L^p -avaruuksissa: kun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on alue ja $1 \leq p < \infty$ määritellään

$$W_p^1(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : f\text{:n heikot osittaisderivaatat } \partial_1 f, \dots, \partial_n f \in L^p(\Omega)\}.$$

Vastaavasti vaatimalla, että L^p -funktion f kaikkien korkeintaan astetta⁸ k olevat heikot derivaatat $\partial^\alpha f \in L^p$, voimme myös määritellä Sobolev-avaruudet $W_p^k(\Omega)$ sekä $H^k(\Omega) \equiv W_2^k(\Omega)$. Tällöin voidaan osoittaa Lauseen 5.20 sivulla 105 vastine eli erikoistapaus *Sobolevin upotuslauseesta*:

Jos $k > \frac{n}{2}$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on riittävän sileäreunainen, niin $H^k(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.

SOVELLUKSISTA DIFFERENTIAALIYHTÄLÖIHIN

Hilbertin avaruus-metodeja voidaan käyttää apuna myös differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Tarkastellaan klassisena esimerkkinä *Sturmin–Liouvilin* yhtälöitä: Oletetaan, että on annettu funktiot $p \in C^1(0, 1)$, $q \in C(0, 1)$ ja etsitään funktiota $u \in C^2(0, 1)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot

$$(SL) \quad \begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = 0 & \text{kaikilla } x \in (0, 1) \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta. \end{cases}$$

Teemme seuraavat *lisäoletukset*: on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$(5.23) \quad p(x) \geq \delta \quad \text{ja} \quad q(x) \geq \delta \quad \text{kaikilla } x \in [0, 1]$$

Seuraava tärkeä *heikon ratkaisun* käsite kytkee yhteen differentiaaliyhtälöt ja Hilbertin avaruudet.

5.24. Määritelmä. Funktio $u \in H^1(0, 1)$ on yhtälön (SL) *heikko ratkaisu*, jos $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ sekä

$$\int_0^1 p(x)u'(x)\varphi'(x) dx + \int_0^1 q(x)u(x)\varphi(x) dx = 0$$

kaikilla testifunktiolla $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$.

Toisin sanoen, funktio u on Sturmin–Liouvilin yhtälön (SL) heikko ratkaisu, jos funktion pu' heikko derivaatta on qu . Todistamme nyt Hilbertin avaruusmenetelmillä seuraavan tunnetun tuloksen.

5.25. Lause. *Jos p ja q ovat alhaalta rajoitettuja ehdon (5.23) mielessä, niin yhtälöllä (SL) on yksikäsitteinen ratkaisu $u \in C^2(0, 1)$.*

Todistamme väitteen useissa pienissä askeleissa.

1. askel: Ensimmäisenä askeleena osoitetaan, että

Väite. *Jos $u \in C^2$ on yhtälön (SL) klassinen ratkaisu, niin u on myös heikko ratkaisu. (Klassinen ratkaisu $u \in C^2(0, 1)$ tarkoittaa tässä, että toinen derivaatta u'' on jatkuva suljetulla välillä $[0, 1]$ ja u toteuttaa reuna-arvotehtävän (SL).)*

⁸sanomme, että $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$ on astetta k , jos $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$

Todistus. Olkoon $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$. Nyt osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^1 (p u' \varphi' + q u \varphi)(x) dx &= \int_0^1 p(x) \varphi(x) u'(x) \\ &+ \int_0^1 \varphi(x) \underbrace{(-(p u')' + q u)(x)}_{\equiv 0} dx = 0. \end{aligned}$$

Sijoitustermi häviää, koska $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Siis u on Määritelmän 5.24 nojalla myös heikko ratkaisu. \square

2. askel: Asetetaan avaruuteen $H^1(0, 1)$ uusi sisätulo

$$\langle u | v \rangle = \int_0^1 p(x) u'(x) \overline{v'(x)} dx + \int_0^1 q(x) u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Selvästi $\langle u | v \rangle$ on funktion u suhteen lineaarinen, $\langle u | v \rangle = \overline{\langle v | u \rangle}$ ja lisäksi $\langle \cdot | \cdot \rangle$ on aidosti positiivinen, sillä $p(x) \geq \delta \geq 0$ ja $q(x) \geq \delta \geq 0$. Siispä $\langle \cdot | \cdot \rangle$ on todella sisätulo avaruudessa $H^1(0, 1)$.

Väite. Joukko $H^1(0, 1)$ varustettuna sisätulolla $\langle \cdot | \cdot \rangle$ on Hilbertin avaruus.

Todistus. On siis vielä näytettävä, että $H^1(0, 1)$ on täydellinen normissa

$$\| \| u \| \| := \sqrt{\langle u | u \rangle}, \quad u \in H^1(0, 1).$$

Olemme oletaneet, että $\delta \leq p, q$ ja koska p sekä q ovat jatkuvina funktioina rajoitettuja välillä $[0, 1]$, niin jollakin vakiolla $M > 0$ on

$$0 < \delta \leq p(x) \leq M < \infty, \quad 0 < \delta \leq q(x) \leq M < \infty.$$

Nyt

$$\begin{aligned} \| \| u - v \| \|^2 &= \int_0^1 [p(x) |u'(x) - v'(x)|^2 + q(x) |u(x) - v(x)|^2] dx \\ &\leq M \int_0^1 [|u'(x) - v'(x)|^2 + |u(x) - v(x)|^2] dx = M \| \| u - v \| \|^2_{H^1}. \end{aligned}$$

Samoin nähdään, että $\delta \| \| u - v \| \|^2_{H^1} \leq \| \| u - v \| \|^2$. Siis, jos (u_n) on Cauchyn jono avaruudessa $(H^1, \| \| \cdot \| \|)$, niin se on Cauchyn jono myös avaruudessa $(H^1, \| \cdot \|_{H^1})$. Koska $(H^1, \| \cdot \|_{H^1})$ on täydellinen (Lause 5.18 sivulla 103), niin löytyy sellainen $u \in H^1$, että $\| \| u_n - u \| \|_{H^1} \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Tällöin $\| \| u_n - u \| \| \leq M \| \| u_n - u \| \|_{H^1} \rightarrow 0$, ja siis myös avaruus $(H^1, \| \| \cdot \| \|)$ on täydellinen. \square

3. askel: Seuraava askel on näyttää, kuinka yhtälölle (SL) löydetään heikko ratkaisu.

Väite. Yhtälöllä (SL) on heikko ratkaisu.

Todistus. Olkoon $E = (H^1, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, missä sisätulo $\langle \cdot | \cdot \rangle$ on sama kuin askeleessa 2, jolloin siis E on Hilbertin avaruus. Kiinnitetään aluksi jokin $f \in E$, jolle $f(0) = \alpha$ ja $f(1) = \beta$, esimerkiksi funktio $f(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x$ kelpaa. Seurauksen 5.22 sivulla 107 nojalla H_0^1 on avaruuden H^1 suljettu aliavaruus ja edellisen askeleen todistuksen nojalla H_0^1 on myös avaruuden E suljettu aliavaruus. Siispä voimme soveltaa luvun 4 normin minimointituloksia: Seurauksen 4.19 sivulla 71 nojalla on olemassa yksikäsitteinen $g \in H_0^1$, jolle

$$\| \| f - g \| \| = \inf \{ \| \| f - h \| \| : h \in H_0^1 \}.$$

Edelleen Lauseen 4.21 sivulla 72 nojalla $(f - g) \perp H_0^1$ sisätulon $\langle \cdot | \cdot \rangle$ suhteen. Jos nyt merkitään $u = f - g$, niin

$$u(0) = f(0) - g(0) = \alpha - 0 = \alpha \quad \text{ja} \quad u(1) = f(1) - g(1) = \beta.$$

Koska selvästi $\mathcal{D}(0, 1) \subset H_0^1(0, 1)$, niin jokaisella $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$ pätee

$$0 = \langle f - g | \overline{\varphi} \rangle = \int_0^1 [p(x)u'(x)\varphi'(x) + q(x)u(x)\varphi(x)] dx$$

eli funktio u on yhtälön (SL) heikko ratkaisu! □

Huomautus. Edellä esitetty heikon ratkaisun konstruointi voidaan tulkita myös *Dirichlét'n periaatteena*: Jos

$$I(u) = \int_0^1 [p(x)|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2] dx = \| \| u \| \|,$$

niin yhtälön (SL) heikko ratkaisu on funktio $u_0 \in H^1(0, 1)$, joka toteuttaa reunaehdot $u_0(0) = \alpha$, $u_0(1) = \beta$ ja jolle pätee

$$I(u_0) = \inf \{ I(u) : u(0) = \alpha \text{ ja } u(1) = \beta \}.$$

4. askel: Tässä askeleessa osoitamme, että yhtälöllä (SL) on korkeintaan yksi ratkaisu. Yhdessä edellisen askeleen kanssa tämä takaa sen, että yhtälöllä on tarkalleen yksi heikko ratkaisu. Tätä varten tarvitsemme seuraavan lemmän, joka osoittaa, että testifunktiot ovat tiheässä avaruudessa H_0^1 (mutta eivät kuitenkaan koko Sobolev-avaruudessa H^1 !!).

5.26. Lemma. *Testifunktioiden sulkeuma $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, kun Ω on rajoitettu avoin väli ja sulkeuma otetaan H^1 -normin suhteen.*

Todistus. Oletetaan seuraavassa laskujen yksinkertaistamiseksi, että $\Omega = (0, 1)$. Ensiksi, $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} \subset H_0^1(\Omega)$, koska $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ ja aliavaruus $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ on suljettu.

Kääntäen, jos $f \in H_0^1(\Omega)$, niin Lauseen 5.20 sivulla 105 nojalla

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt.$$

Edelleen Lemman 5.13 sivulla 101 todistuksessa osoitettiin, että $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ (normin $\|\cdot\|_2$ suhteen), joten löytyy $g \in \mathcal{D}(\Omega)$, jolle $\|f' - g\|_2 < \varepsilon$. Koska väli $[0, 1]$ on rajoitettu, niin tiedämme, että $\|f' - g\|_1 \leq \|f' - g\|_2 < \varepsilon$. Siten

$$(*) \quad \left| \int_0^1 g(x) \, dx \right| = \left| \int_0^1 [g(x) - f'(x)] \, dx \right| \leq \|g - f'\|_1 < \varepsilon,$$

missä ensimmäinen yhtälö seuraa tiedosta $0 = f(1) = \int_0^1 f'(t) \, dt$.

Väitteen osoittamiseksi haluaisimme nyt konstruoida funktion $h \in \mathcal{D}(0, 1)$, jolle sekä $\|f - h\|_2$ ja $\|f' - h'\|_2$ olisivat pieniä. Hyvä kandidaatti vaikuttaisi olevan funktion g integraalifunktio, eli

$$(**) \quad h(x) := \int_0^x g(t) \, dt.$$

Kuuluuko h kuitenkin avaruuteen $\mathcal{D}(0, 1)$? Jotta se kuuluisi, on oltava $h(1) = 0$, mikä tarkoittaa, että vakio

$$c = \int_0^1 g(x) \, dx = 0.$$

Meillä on edellä tiedossa ainoastaan arvio (*). Korjataksemme tämän puutteen argumentoimme Lemman 5.19 tapaan: *kiinnitämme* testifunktion $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$, joka toteuttaa ehdot $\varphi \geq 0$ ja $\|\varphi\|_1 = \int_0^1 \varphi(t) \, dt = 1$. Olkoon nyt $\tilde{g} := g - c\varphi$. Silloin $\tilde{g} \in \mathcal{D}(0, 1)$, $\int_0^1 \tilde{g} \, dt = 0$ ja lisäksi

$$\|g - \tilde{g}\|_2 = |c| \|\varphi\|_2 < \varepsilon \|\varphi\|_2$$

arvion (*) nojalla. Voimme nyt vaihtaa funktion g funktioksi \tilde{g} , jolloin kaavan (**) määräämä integraalifunktio $h \in \mathcal{D}(0, 1)$. Nyt loppuargumentti etenee suoraviivaisesti:

$$\begin{aligned} \|f - h\|_{H^1}^2 &= \int_0^1 |f(x) - h(x)|^2 \, dx + \int_0^1 |f'(x) - h'(x)|^2 \, dx \\ &= \int_0^1 \left| \int_0^x (f'(t) - \tilde{g}(t)) \, dt \right|^2 \, dx + \int_0^1 |f'(x) - \tilde{g}(x)|^2 \, dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f'(t) - \tilde{g}(t)| \, dt \right)^2 \, dx + \|f' - \tilde{g}\|_2^2 \\ &\leq \int_0^1 |f'(t) - \tilde{g}(t)|^2 \, dt + \|f' - \tilde{g}\|_2^2 \leq 2(1 + \|\varphi\|_2)^2 \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Toiseksi viimeinen arvio seuraa Cauchy–Schwarzin (tai Hölderin) epäyhtälön nojalla. Siispä $H_0^1(\Omega) \subset \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$. □

Edeltävän lemmän avulla voimme nyt osoittaa askeleen 4. väitteen:

Väite. *Yhtälön (SL) heikko ratkaisu on yksikäsitteinen.*

Todistus. Osoitimme 3. askeleessa, että jos $g \in H_0^1$ on se yksikäsitteinen alkio, jolle $f - g \perp H_0^1$, niin $u = f - g$ toteuttaa yhtälön (SL).

Kääntäen, jos u_1 toteuttaa yhtälön (SL), niin reunaehdon nojalla $u_1 = f - g_1$, missä $g_1 \in H_0^1(0, 1)$. Heikon ratkaisun määritelmän nojalla $\langle u_1 | \varphi \rangle = 0$ jokaisella $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$ eli $f - g_1 \perp \mathcal{D}(0, 1)$. Mutta Lemman 5.26 mukaan $\overline{\mathcal{D}(0, 1)} = H_0^1$, joten $f - g_1 \perp H_0^1$. Siispä Lauseen 4.21 sivulla 72 nojalla $\|f - g_1\| = \text{dist}(f, H_0^1)$, joten Lauseen 4.18 sivulla 69 nojalla $u_1 = f - g_1 = f - g = u$, eli heikko ratkaisu on yksikäsitteinen. \square

5. askel: Viimeisenä askeleena osoitamme, että edellisissä askeleissa konstruoitu yksikäsitteinen heikko ratkaisu on myös klassinen ratkaisu, josta Lause 5.25 seuraa.

Väite. *Yhtälön (SL) heikko ratkaisu u on klassinen ratkaisu eli $u \in C^2[0, 1]$.*

Todistus. Alkujaan tiedetään, että $u \in H^1$, joten $u' \in L^2(0, 1)$. Koska $p \in C^1(0, 1)$, niin tulo $pu' \in L^2(0, 1)$. Koska tulon pu' heikko derivaatta on $qu \in L^2$, niin tiedämmekin siis, että $pu' \in H^1(0, 1)$, joten Lauseen 5.20 nojalla funktio pu' on jatkuva. Edelleen, koska $p \geq \delta > 0$, niin $u' \in C(0, 1)$, joten olemme johtaneet, että itse asiassa $u \in C^1(0, 1)$.

Nyt $(pu')' = qu \in C(0, 1)$ myös klassisessa mielessä, joten $pu' \in C^1(0, 1)$, mistä seuraa edelleen, että $u \in C^2(0, 1)$. \square

Lisätietoja: (1) Edellä esitetty Sturm–Liouvilien yhtälöiden ratkaisumenetelmää voidaan soveltaa korkeammissa dimensioissa ns. *elliptisiin yhtälöihin*, joiden prototyyppi on *Laplacen yhtälö*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = f, \end{cases}$$

missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on alue ja $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. Ratkaisustrategia toimii kuten edellä:

- i)* Klassinen ratkaisu on heikko ratkaisu
- ii)* On olemassa heikko ratkaisu
- iii)* Heikko ratkaisu on yksikäsitteinen (joten myös klassinen ratkaisu on yksikäsitteinen)
- iv)* Heikko ratkaisu u on riittävän säännöllinen (eli edellä $u \in C^2$).

(2) Historiallisesti, Bernhard Riemann (1826–1866) ratkaisi yhtälön $\Delta u = f$ juuri edellä mainitun Dirichlét'n periaatteen avulla. Karl Weierstraß (1815–1897) aiheutti sensaation kriittisellä artikkelillaan "Über das Sogenannte Dirichletsche Princip", jossa hän esitti seuraavan vastaesimerkin: Jos

$$J(u) = \int_{-1}^1 x^2 |u'(x)|^2 dx,$$

niin ei ole jatkuvaa funktiota u_0 , jolle $u_0(1) = 1$, $u_0(-1) = -1$ ja

$$J(u_0) = \inf \{ J(u) : u(-1) = 1, u(1) = -1 \}.$$

Nimittäin, jos

$$\varphi(x) = \frac{\arctan \frac{x}{\varepsilon}}{\arctan \frac{1}{\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

niin

$$\varphi'(x) = \frac{\varepsilon}{(\arctan \frac{1}{\varepsilon})(x^2 + \varepsilon^2)},$$

joten

$$J(\varphi) < \frac{2\varepsilon}{\arctan \frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow 0, \text{ kun } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Miksi Dirichlét'n periaate ei toimikaan? Syy (joka ymmärrettiin vasta 1900-luvulla) on se, ettei H^1 (tai H_0^1) ole täydellinen normissa

$$\|u\| = \int_{-1}^1 x^2 |u'(x)|^2 dx.$$

Tästä nimenomaisesta syystä oletettiin edellä, että $p, q \geq \delta$ yhtälössä (SL). Edellä oleva normi vastaa (SL)- yhtälön normia, kun $q \equiv 0$ ja $p(x) = x^2$. Oletuksesta $q \geq \delta$ voidaan luopua, mutta jos funktiolla p on nollakohta tilanne muuttuu radikaalisti.

Weierstrassin kritiikillä on ollut huomattava merkitys differentiaaliyhtälöiden teorialle ja variaatiolaskennalle, vaikka Dirichlét'n periaate nyt pystytään perustelemaan täsmällisesti Hilbertin avaruuksien teorian avulla.

Harjoitustehtäviä

5:1 Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $P(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$ kiinteä trigonometrinen polynomi. Laske konvoluutiofunktion

$$P \star f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x-t)f(t)dt$$

Fourier-kertoimet $\widehat{P \star f}(m)$ funktioiden f ja P Fourier-kertoimien avulla. [Fubinin lausetta saa käyttää vapaasti.]

5:2 Tarkastellaan Hilbertin avaruutta $L^2(0, 2\pi)$ varustettuna sisätulolla $(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$. Laske funktion $g(t) = t$, $t \in [0, 2\pi]$, Fourier kertoimet ortonormaalin jonon $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int})_{n \in \mathbf{Z}}$ suhteen. Laske normi $\|g\|_2$ sekä integroimalla, että Parsevalin yhtälön avulla, kun pidetään tunnettuna että $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int})_{n \in \mathbf{Z}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$. [Huomaa sivutuotteena kaava $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.]

5:3 Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 2π -periodinen funktio. Näytä:

- (i) jos $f \in C^k$, niin $|\hat{f}(n)| \leq M(1 + |n|)^{-k}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$,
(ii) jos $f \in L^2$ ja $|\hat{f}(n)| \leq M(1 + |n|)^{-(k+2)}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$, niin $f \in C^k$.

Edellä $k \in \mathbf{N}$ ja M on vakio.

5:4 Näytä: jos $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$, niin $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ on jatkuva funktio (eli funktion f ekvivalenssiluokka L^2 :ssa sisältää jatkuvan edustajan). [Vihje. Näytä, että vastaava Fourier-sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$ on absoluuttisesti suppeneva Banachin avaruudessa $C(0, 2\pi)$.]

5:5 (i) Näytä, että funktio $h \in C^\infty(\mathbf{R})$, kun

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(ii) Olkoon $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$. Näytä (i)-kohdan perusteella, että on olemassa funktio $\eta_\varepsilon \in C^\infty((0, 1))$, jolle pätee $0 \leq \eta_\varepsilon(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \Omega$, $\eta_\varepsilon(x) \equiv 0$, kun $0 < x < \varepsilon$ tai $1 - \varepsilon < x < 1$, sekä $\eta_\varepsilon(x) \equiv 1$ kaikilla $2\varepsilon < x < 1 - 2\varepsilon$.

5:6 Näytä, että funktio

$$h(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{jos } x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

kuuluu Sobolev-avaruuteen $H^1(\mathbf{R})$ ja määritä sen heikko derivaatta $h' \in L^2(\mathbf{R})$.

5:7 Olkoon $f \in L^2 = L^2([0, 2\pi])$ funktio jolle $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |\hat{f}(n)|^2 < \infty$. Riesz-Fischerin lauseen nojalla on olemassa sellainen $g \in L^2$, että $\hat{g}(n) = in\hat{f}(n)$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$. Näytä, että g on funktion f heikko derivaatta, eli

$$\int_0^{2\pi} g(x)\phi(x)dx = - \int_0^{2\pi} f(x)\phi'(x)dx \quad \text{kaikilla } \phi \in \mathcal{D}((0, 2\pi)).$$

[Vihje: todista aluksi väite kun f on trigonometrinen polynomi ja yleinen tapaus approksimoimalla.]

5:8 Olkoon $f_\alpha(x) = x^\alpha$ kun $x \in (0, 1)$. Millä vakion $\alpha \in \mathbf{R}$ arvolla $f_\alpha \in H^1(0, 1)$, eli siis milloin sekä $f_\alpha \in L^2(0, 1)$ ja sen heikko derivaatta $f'_\alpha \in L^2(0, 1)$?

5:9 Osoita, että $H_0^1(0, 1) = \{f \in H^1(0, 1) : f(0) = f(1) = 0\}$ on avaruuden $H^1(0, 1)$ suljettu aliavaruus. [Vihje. Johda arvio $|f(x)| \leq 2\|f\|_{H^1}$, kun

$f \in H^1(0, 1)$ ja $x \in (0, 1)$. Lähde liikkeelle Lauseen 5.20 antamasta jatkuvasta edustajasta f , jolle $f(x) = \int_y^x f'(t)dt + f(y)$ kaikilla $x, y \in (0, 1)$. Hölderin epäyhtälö auttaa eteenpäin.]

6. LINEAARISET OPERAATTORIT

Luvussa 5 osoitimme, että jos $f \in L^2$, niin vastaavan Fourier-sarjan osasummat suppenevat kohti f :ää L^2 -normissa (kts. Seuraus 5.8 sivulla 97). Osoitimme myös, että jos f on jatkuva ja 2π -periodinen funktio, niin Fourier-osasummien *aritmeettiset keskiarvot* suppenevat tasaisesti kohti funktiota f (kts. Fejérin lause 5.4 sivulla 92). Koska nälkä vain kasvaa syödessä, niin voimme miettiä uusia luontevia Fourier-sarjoihin liittyviä kysymyksiä:

Kysymys 1: Suppeneeko Fourier-sarja L^1 -normissa, jos f on L^1 -funktio?

Kysymys 2: Suppeneeko jatkuvan funktion Fourier-sarja *pisteittäin*? Eli jos $f \in C(0, 2\pi)$ ja $f(0) = f(2\pi)$, onko

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f; x) \text{ kaikilla } x?$$

Näiden kysymysten ratkaisemiseksi meidän on tutkittava Fourier-osasummien $s_n(f; \cdot)$ ominaisuuksia lineaarisena operaattorina $f \mapsto s_n(f; \cdot)$ (ja vastauksiin palataan luvussa 7). Itse asiassa, jatkuvan lineaarikuvauksen käsite on funktioanaalianalyysin keskeisiä peruskäsitteitä. Palautetaan lyhyesti mieleen kurssin alkupuolella (luvussa 2) jo esiteltyt lineaariset operaattorit.

Olkoon E ja F \mathbb{K} -kertoimisia vektoriavaruuksia. Kuvaukset $T: E \rightarrow F$ on *lineaarinen*, jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

kun $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Linearisesta kuvauksesta käytetään usein nimitystä *lineaarinen operaattori*; näin erityisesti siinä tapauksessa, että T on jatkuva.

Luvussa 2 käsitelimme jo lineaaristen operaattoreiden jatkuvuutta (kts. Määritelmä 2.24 sivulla 23 ja Lause 2.30 sivulla 25). Osoitimme muun muassa, että lineaarikuvaukset $T: E \rightarrow F$ on jatkuva jos ja vain jos sen operaattorinormi $\|T\|$ on äärellinen, missä

$$\|T\| = \sup_{x \in B_E} \|Tx\|_F,$$

ja $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ on avaruuden E suljettu yksikköpallo.

Tässä luvussa tarkastelemme operaattoreiden itsensä muodostamia avaruuksia. Tätä varten otamme käyttöön muutaman uuden merkinnän. Olkoon E ja F normiavaruuksia. Asetamme

$$L(E, F) = \{T: E \rightarrow F \mid T \text{ on lineaarikuvaukset}\},$$

$$\mathcal{L}(E, F) = \{T: E \rightarrow F \mid T \text{ on jatkuva lineaarikuvaukset}\},$$

ja erityisesti, kun $F = E$, merkitsemme $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. Osoittautuu, että jatkuvat lineaariset operaattorit muodostavat normiavaruuden, kun normiksi valitaan operaattorinormi.

6.1. Lause. *Olkoot E ja F normiavaruuksia, joissa skalaarikuntana on \mathbb{K} . Tällöin $\mathcal{L}(E, F)$ on \mathbb{K} -kertoiminen normiavaruus, jossa normina on operaattorinormi*

$$T \mapsto \|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}.$$

Todistus. Jos $S, T \in L(E, F)$, niin vastaava summaoperaattori on

$$(S + T)(x) = Sx + Tx, \quad x \in E.$$

Kuvaus $V = S + T$ on lineaarinen kuvaus $E \rightarrow F$, sillä jos $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, niin

$$\begin{aligned} V(\alpha x + \beta y) &= S(\alpha x + \beta y) + T(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha Sx + \beta Sy + \alpha Tx + \beta Ty \\ &= \alpha(Sx + Tx) + \beta(Sy + Ty) \\ &= \alpha V(x) + \beta V(y). \end{aligned}$$

Samoin kuvaus cS on lineaarinen $E \rightarrow F$, missä $(cS)(x) = cSx$, kun $x \in E$ ja $c \in \mathbb{K}$. Tällöin $L(E, F)$ on vektoriavaruus, kun nolla-alkiona on nollakuvaus $\bar{0}(x) = \bar{0}_F$ kaikilla $x \in E$ (lineaarialgebran yksityiskohdat vapaa HT).

Näytämme seuraavaksi, että $\mathcal{L}(E, F)$ on avaruuden $L(E, F)$ vektorialiavaruus ja kuvaus $T \mapsto \|T\|$ on normi vektoriavaruudessa $\mathcal{L}(E, F)$. Tämän näyttämiseksi käydään läpi normin aksiomat:

(N1) Olkoon $S, T \in \mathcal{L}(E, F)$ ja $x \in B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Tällöin soveltamalla kolmioepäyhtälöä avaruudessa F saadaan, että

$$\|(S + T)x\|_F = \|Sx + Tx\|_F \leq \|Sx\|_F + \|Tx\|_F \leq \|S\| + \|T\|$$

koska $\|x\| \leq 1$. Siis

$$\|S + T\| = \sup_{x \in B_E} \|(S + T)x\|_F \leq \|S\| + \|T\|.$$

Eryityisesti, operaattori $S + T$ on jatkuva (ts. rajoitettu), eli $S + T \in \mathcal{L}(E, F)$.

(N2) Olkoon $c \in \mathbb{K}$ ja $x \in B_E$. Tällöin $\|cTx\|_F = |c|\|Tx\|_F$, joten

$$\begin{aligned} \|cT\| &= \sup\{\|cTx\|_F : x \in B_E\} = |c| \sup\{\|Tx\|_F : x \in B_E\} \\ &= |c| \|T\|. \end{aligned}$$

Eryityisesti $cT \in \mathcal{L}(E, F)$. Yhdessä edellisen kohdan (N1) kanssa tästä seuraa, että $\mathcal{L}(E, F)$ on vektoriavaruuden $L(E, F)$ vektorialiavaruus.

(N3) Operaattorinormin positiivisuus on selvä. Jos $\|T\| = 0$, niin $\|Tx\|_F = 0$ kaikilla $x \in E$ eli $Tx = \bar{0}_F$ kaikilla $x \in E$. Siispä $T = \bar{0}$, missä $\bar{0}$ on nollaoperaattori. Käänteinen suunta on selvä.

Siispä $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ on normiavaruus. \square

Tutkimme seuraavaksi, milloin avaruus $\mathcal{L}(E, F)$ on Banachin avaruus eli täydellinen operaattorinormissa. Tätä varten meidän on pohdittava hiukan erilaisia operaattoreihin liittyviä suppenemiskäsitteitä. Koska lineaariset operaattorit ovat kuvauksia, voimme puhua niiden pisteittäisestä suppenemisestä. Siis jos E ja F ovat normiavaruuksia ja $A \subset E$ on osajoukko, niin sanomme että jono kuvauksia $f_n: A \rightarrow F$ *suppenee pisteittäin* joukossa A kohti kuvausta $f: A \rightarrow F$, jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Havaitsemme aluksi, että pisteittäinen suppeneminen säilyttää lineaarisuuden eli lineaaristen kuvausten pisteittäinen raja on myös lineaarinen kuvaus.

6.2. Lause. *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $(T_n) \subset L(E, F)$ jono lineaarikuvauksia, jotka suppenevat pisteittäin E :ssä kohti kuvausta $T: E \rightarrow F$. Tällöin $T \in L(E, F)$, eli $T: E \rightarrow F$ on lineaarinen.*

Todistus. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda T_n x + \mu T_n y) \\ &= \lambda T x + \mu T y. \end{aligned}$$

\square

Seuraavaksi herää kysymys, säilyykö lineaarisen kuvauksen jatkuvuuskin pisteittäisessä suppenemisessä? Vastaus on yleisessä tapauksessa kielteinen, kuten seuraava konkreettinen esimerkki osoittaa.

6.3. Esimerkki. Olkoon $\mathcal{P} = \{x: x \text{ on } \mathbb{R}\text{-kertoiminen polynomi}\}$ ja $\|x\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$, kun $x \in \mathcal{P}$. Määrittemme jokaisella $n \in \mathbb{N}$ kuvauksen

$$T_n x = n \left(x(1) - x\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right), \quad x \in \mathcal{P}.$$

Tällöin $T_n: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ on lineaarinen ja $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$, koska $|x(1)| \leq \|x\|_\infty$ ja $|x(1 - \frac{1}{n})| \leq \|x\|_\infty$, joten $\|T_n x\| \leq 2n \|x\|_\infty$. Siispä $\|T_n\| \leq 2n$. Toisaalta (erotusosamäärä!)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1) - x(1 - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1 - \frac{1}{n}) - x(1)}{-\frac{1}{n}} = x'(1),$$

joten jono (T_n) suppenee *pisteittäin* kohti kuvausta $T: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, missä $x \mapsto x'(1)$. Kuvaus T ei kuitenkaan ole jatkuva: jos $x_n(t) = t^n$, niin $\|x_n\|_\infty = 1$ ja

$$|Tx_n| = |x'_n(1)| = n, \text{ joten } \|T\| \geq \sup_n |Tx_n| = \infty.$$

Siis normiavaruuden jatkuvien lineaarikuvausten pisteittäinen raja ei välttämättä olekaan jatkuva. (Ehkä yllättäen, täydellisyys pelastaa tilanteen, kuten tulemme näkemään luvussa 7 käyttämällä tasaisen rajoituksen periaatetta.)

Palaamme pisteittäisen suppenemisen tarkastelun jälkeen operaattorinormin määräämään suppenemiseen.

6.4. Määritelmä. Jos $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(E, F)$ ja $T \in \mathcal{L}(E, F)$, niin sanomme, että jono (T_n) suppenee kohti operaattoria T *operaattorinormin mielessä* (eli *tasaisesti*), jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in B_E} \|T_n x - Tx\| \right) = 0.$$

Tällöin merkitsemme $T_n \rightarrow T$ kun $n \rightarrow \infty$, tai $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$.

Huomautus. Jos $T_n \rightarrow T$ operattorinormin mielessä kun $n \rightarrow \infty$, niin T_n suppenee myös pisteittäin kohti operaattoria T , sillä kaikilla $x \in E$ pätee

$$\|T_n x - Tx\| = \|(T_n - T)x\| \leq \|T_n - T\| \|x\| \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$.

Käänteinen väite *ei* kuitenkaan pidä paikkaansa.

6.5. Esimerkki. Määrittelemme lineaarikuvaukset $T_n: \ell^1 \rightarrow \ell^1$ asettaen

$$T_n x = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ kpl}}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots \right),$$

kun $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^1$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\|T_n x\|_1 = \sum_{k=n}^\infty |x_k| \leq \sum_{k=1}^\infty |x_k| = \|x\|_1,$$

kun $x \in \ell^1$, joten kuvaukset T_n ovat jatkuvia ja $\|T_n\| \leq 1$. Edelleen, $T_n(x) \rightarrow \bar{0}$ kaikilla $x \in \ell^1$ eli $T_n \rightarrow \bar{0}$ pisteittäin. Nimittäin: $\|T_n x\|_1 = \sum_{k=n}^\infty |x_k| \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$ kaikilla $x = (x_k) \in \ell^1$.

Kuitenkaan jono (T_n) ei suppene operaattorinormin mielessä kohti nollaoperaattoria: Jos

$$e_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ kpl}}, 1, 0, 0, \dots \right) \in \ell^1,$$

niin $T_n e_n = e_n$ ja siis $\|T_n e_n\|_1 = \|e_n\|_1 = 1$, joten $\|T_n\| = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Olemme jo todenneet, että jatkuvien lineaaristen operaattoreiden pisteittäinen suppeneminen ei takaa jatkuvuutta. Suppeneminen operaattorinormin suhteen muuttaa tilanteen, kuten seuraava tulos osoittaa. Lisäksi, seuraavan keskeisen tuloksen avulla voimme rakentaa uusia Banachin avaruuksia lähtien tunnetuista avaruuksista.

6.6. Lause. *Jos E on normiavaruus ja F on Banachin avaruus, niin $\mathcal{L}(E, F)$ varustettuna operaattorinormilla $\|\cdot\|$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Olkoon (T_n) Cauchyn jono avaruudessa $\mathcal{L}(E, F)$ ja $x \in E$. Tällöin

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|,$$

kun $n, m \in \mathbb{N}$, joten jono $(T_n x)$ on Cauchy avaruudessa F . Koska F on täydellinen, niin jono $(T_n x)$ suppenee; merkitään tätä rajaa

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x, \quad x \in E.$$

Siispä jono (T_n) suppenee kohti kuvausta T pisteittäin, joten Lauseen 6.2 sivulla 118 nojalla T on lineaarikuvaus $E \rightarrow F$.

Väite. $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ja $\|T - T_n\| \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska (T_n) on Cauchyn jono avaruudessa $\mathcal{L}(E, F)$, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että aina kun $n, m \geq n_0$, niin $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$. Jos $x \in E$ ja $\|x\| \leq 1$, niin silloin

$$\|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)x\|_F \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_E \leq \|T_n - T_m\| \leq \varepsilon.$$

Pitämällä edellä piste $x \in E$ ja luku $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, kiinteinä ja antamalla luvun m kasvaa rajatta tästä seuraa, että

$$\|T_n x - Tx\|_F = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n x - T_m x\|_F \leq \varepsilon,$$

ja siis $\|(T_n - T)x\|_F \leq \varepsilon$ aina kun $n \geq n_0$ ja $x \in B_E$. Näin ollen kuvaus $T_{n_0} - T$ on jatkuva, joten myös

$$T = T_{n_0} - (T_{n_0} - T)$$

on jatkuva. Operaattorinormin määritelmän ja viimeisimmän arvion nojalla

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon,$$

kun $n \geq n_0$, joten jono (T_n) siis suppenee avaruudessa $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$. Siispä $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ on täydellinen. \square

Operaattorien avaruuksissa on myös algebrallista rakennetta, sillä voimme määritellä operaattoritulon yhdistettynä kuvauksina. Seuraava lause kertoo saman tarkemmin.

6.7. Lause. *Olkoot E, F ja G normiavaruuksia sekä $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ja $S \in \mathcal{L}(F, G)$ rajoitettuja lineaarisia operaattoreita. Silloin yhdistetty kuvaus $ST = S \circ T \in \mathcal{L}(E, G)$ ja*

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$$

(siis operaattorinormi on submultiplikatiivinen).

Todistus. Lineaaristen kuvausten yhdiste on lineaarinen (Lineaarialgebran nojalla), joten $ST \in L(E, G)$. Jos $x \in E$ ja $\|x\| \leq 1$, niin

$$\|STx\|_G = \|S(Tx)\|_G \leq \|S\| \|Tx\|_F \leq \|S\| \|T\|.$$

Siispä $ST \in \mathcal{L}(E, G)$ ja $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$. (Toki kuvauksen ST jatkuvuus seuraa myös Topologia I:n tiedosta, että jatkuvien kuvausten yhdiste säilyy jatkuvana.) \square

Huomautus. Banachin avaruutta E sanotaan *Banachin algebraksi*, jos avaruuden E alkioille on määritelty tulo $E \times E \rightarrow E$; $(x, y) \mapsto xy$, joka toteuttaa seuraavan ehdon:

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in E,$$

sekä lisäksi *algebran* ehdot: (kaikilla $x, y, z \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$)

$$x(yz) = (xy)z, \quad (\text{tulon assosiatiiivisuus}),$$

$$x(y+z) = xy + xz, \quad (x+y)z = xz + yz, \quad (\text{osittelulait}),$$

$$(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y), \quad (\text{skaalarilla kertomisen ja tulon yhteys}).$$

6.8. Esimerkki. (1) Lauseiden 6.6 ja 6.7 nojalla $\mathcal{L}(E)$ on Banachin algebra, kun E on Banachin avaruus, normina on operaattorinormi ja tulona ST on kuvausten yhdistäminen.

(2) Jos X on kompakti avaruus, niin jatkuvien funktioiden $X \rightarrow \mathbb{K}$ muodostama Banachin avaruus $C(X)$ on Banachin algebra, kun normina on $\|\cdot\|_\infty$ ja tulona $(fg)(x) = f(x)g(x), x \in X$.

Tutkimme seuraavaksi milloin käänteiskuvaus T^{-1} on jatkuva, kun $T : E \rightarrow F$ on lineaarinen bijektio. Määritelmän mukaan $T^{-1}(y) = x$ jos ja vain jos $Tx = y$ (missä $x \in E$ ja $y \in F$).

6.9. Lause. *Olkoon E, F normiavaruuksia ja $T : E \rightarrow F$ lineaarinen bijektio. Tällöin T^{-1} on lineaarinen ja*

$$(6.10) \quad T^{-1} \text{ jatkuva} \iff \text{on olemassa } \alpha > 0, \text{ jolle } \|Tx\| \geq \alpha \|x\|, \quad x \in E$$

(eli lineaarikuvaus T on alhaalta rajoitettu).

Todistus. Jos $x, y \in F$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, niin

$$T(\lambda T^{-1}x + \mu T^{-1}y) = \lambda TT^{-1}x + \mu TT^{-1}y = \lambda x + \mu y = T(T^{-1}(\lambda x + \mu y)).$$

Koska T on bijektio, niin tästä seuraa, että $\lambda T^{-1}x + \mu T^{-1}y = T^{-1}(\lambda x + \mu y)$. Siispä T^{-1} on lineaarinen. Osoitetaan seuraavaksi ehto (6.10).

" \Rightarrow ": Koska $T^{-1}x = \bar{0}$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$, niin voidaan olettaa $E \neq \{\bar{0}\}$ ja $F \neq \{0\}$. Tällöin on siis olemassa $x_0 \in F$, $x_0 \neq 0$, jolloin

$$0 < \frac{\|T^{-1}x_0\|}{\|x_0\|} \leq \|T^{-1}\|.$$

Siispä $0 < \|T^{-1}\| < \infty$, joten luku $1/\|T^{-1}\|$ on äärellinen. Jos $x \in E$ on mielivaltainen, niin $\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\| \|Tx\|$, joten

$$\left(\frac{1}{\|T^{-1}\|}\right) \cdot \|x\| \leq \|Tx\|, \quad x \in E.$$

Voidaan siis valita $\alpha = \|T^{-1}\|^{-1}$, josta seuraa väitteen tämä suunta.

" \Leftarrow ": Oletetaan, että $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ kaikilla $x \in E$. Jos $y \in F$ on mielivaltainen, niin valitaan $x = T^{-1}y$. Silloin $Tx = y$ ja oletuksen perusteella

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{\alpha}\|Tx\| = \frac{1}{\alpha}\|y\|,$$

joka on voimassa kaikilla $y \in F$. Siispä $\|T^{-1}\| \leq 1/\alpha < \infty$ (eli T^{-1} on jatkuva). \square

6.11. Seuraus. *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T: E \rightarrow F$ lineaarinen bijektio. Silloin T on homeomorfismi jos ja vain jos on olemassa sellaiset vakiot $\alpha, \beta > 0$, joille*

$$(6.12) \quad \alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\| \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Todistus. Tämä seuraa välittömästi Lauseesta 2.30 sivulla 25 ja Lauseesta 6.9. \square

6.13. Määritelmä. Jos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ toteuttaa Seurauksen 6.11 ehdot (6.12), niin sanomme jatkossa, että T on lineaarinen *isomorfismi* ja että avaruudet E ja F ovat (lineaarisesti) isomorfiset.

Täydellisyys säilyy lineaarisissa isomorfismeissa.

6.14. Lause. *Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $T \in \mathcal{L}(E, F)$ isomorfismi. Silloin E on täydellinen jos ja vain jos F on täydellinen.*

Todistus. Symmetrian mukaan riittää osoittaa väite vain toiseen suuntaan. Oletetaan siis, että E on täydellinen. Olkoon $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyn jono avaruudessa F . Silloin

$$\|T^{-1}x_n - T^{-1}x_m\| = \|T^{-1}(x_n - x_m)\| \leq \|T^{-1}\| \|x_n - x_m\|, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

ja $(T^{-1}x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on siis Cauchyn jono avaruudessa E . Koska E on täydellinen, niin $T^{-1}x_n \rightarrow y$ (jollakin $y \in E$) kun $n \rightarrow \infty$, ja

$$\|x_n - Ty\| = \|T(T^{-1}x_n) - Ty\| \leq \|T\| \|T^{-1}x_n - y\| \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Täten myös F on täydellinen. □

Erikoistapauksena, jos normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentteja E :ssä (kts. Määritelmä 2.11 sivulla 15), niin Lauseen 6.14 nojalla $(E, \|\cdot\|_1)$ on täydellinen jos ja vain jos $(E, \|\cdot\|_2)$ on täydellinen. (Tässä siis identtinen kuvaus I_E on isomorfismi $(E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$.)

6.15. Esimerkki. (a) Jos $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ ja χ_I on välin I karakteristinen funktio, niin kuvaus

$$T: (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \chi_{[n, n+1)}$$

määrää isomorfismin $T: \ell^p(\mathbb{Z}) \rightarrow E$, missä $E = \overline{\text{span}}\{\chi_{[n, n+1)} : n \in \mathbb{Z}\}$ on avaruuden $L^p(\mathbb{R})$ suljettu aliavaruus. Itse asiassa, T on *isometria* eli $\|Tx\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|x\|_{\ell^p}$ kaikilla $x = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$, koska

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \chi_{[n, n+1)}(x) \right|^p dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^p \quad \text{kaikilla } (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z}).$$

(b) Osoitamme, että jonoavaruus $c = \{(x_n) : \lim_n x_n \text{ olemassa}\}$ on isomorfinen avaruuden c_0 kanssa (molemmissa sup-normi $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$).

Jos $x = (x_n) \in c$, niin merkitään $\ell(x) = \lim_n x_n$. Määritellään $T: c \rightarrow c_0$ asettamalla $T(x_n) = (y_n)$, missä $y_1 = \ell(x)$ ja $y_n = x_{n-1} - \ell(x)$ kun $n \geq 2$. Tällöin $T(x_n) \in c_0$ ja T on lineaarinen kuvaus $c \rightarrow c_0$ (tarkista!). Lisäksi

$$\|Tx\|_\infty \leq \sup_n |x_n| + |\ell(x)| \leq 2\|x\|_\infty,$$

joten T on jatkuva (ja $\|T\| \leq 2$). Määritellään seuraavaksi $S: c_0 \rightarrow c$ ehdolla $S(x_n) = (x_{n+1} + x_1)_{n \in \mathbb{N}}$ kun $(x_n) \in c_0$. Tällöin S on lineaarikuvaus $c_0 \rightarrow c$, ja

$$\|Sx\|_\infty = \sup_n |x_{n+1} + x_1| \leq 2\|x\|_\infty,$$

eli myös $\|S\| \leq 2$. Lisäksi $T \circ S = id_{c_0}$ ja $S \circ T = id_c$, joten T on bijektio (ja $S = T^{-1}$). Nimittäin,

$$T(S(x_n)) = T((x_{n+1} + x_1)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_1, x_2 + x_1 - x_1, x_3 + x_1 - x_1, \dots) = (x_n)$$

kaikilla $(x_n) \in c_0$. Yhtälö $S \circ T = id_c$ todetaan samoin.

(c) [Lisätietoja] Jos $p \neq q$, niin ℓ^p ei ole isomorfinen avaruuden ℓ^q kanssa (todistus sivuutetaan). Samoin avaruus L^p on isomorfinen avaruuden L^q kanssa $\iff p = q$. Jonoavaruus ℓ^2 on isomorfinen erään avaruuden L^q suljetun aliavaruuden kanssa, jos $q \geq 2$. Mutta jos $q < 2$, niin tämä ei päde. Näiden todistukset ovat epätriviaaleja ja sivuutetaan. Lisäksi jokainen *separoituva* Banachin avaruus E on isomorfinen avaruuden $C(0, 1)$ suljetun aliavaruuden kanssa (ja tämänkin todistus sivuutetaan).

(d) [ei käsitelty vuonna 2010] Sturmin–Liouvilin yhtälöiden yhteydessä tarkastelimme tavallisen normin

$$\|f\|_{H^1} = \left(\int_0^1 (|f'(x)|^2 + |f(x)|^2) dx \right)^{1/2}$$

lisäksi myös normia

$$\|f\|_E = \left(\int_0^1 (|f'(x)|^2 p(x) + |f(x)|^2 q(x)) dx \right)^{1/2},$$

missä $0 < \delta \leq p, q \leq M < \infty$. Silloin osoitimme, että

$$\sqrt{\delta} \|f\|_{H^1} \leq \|f\|_E \leq \sqrt{M} \|f\|_{H^1}$$

ja siten $\|\cdot\|_{H^1}$ ja $\|\cdot\|_E$ määräävät avaruuteen H^1 saman topologian ja molemmat normit ovat täydellisiä.

Todistamme seuraavaksi varsin hyödyllisen laajennusominaisuuden jatkuville operaattoreille.

6.16. Lause. *Olkoon E normiavaruus, F Banachin avaruus, $M \subset E$ vektoriavaruus (jota ei oleteta suljetuksi) sekä $T: M \rightarrow F$ jatkuva lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva lineaarikuvaus $\widehat{T}: \overline{M} \rightarrow F$, jolle $\widehat{T}z = Tz$ kaikilla $z \in M$ ja $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.*

Todistus. Olkoon $z \in \overline{M}$ mielivaltainen. Tällöin löytyy sellainen jono $(x_n) \subset M$, jolle $x_n \in B(z, \frac{1}{n})$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten $z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Jos $p, q \in \mathbb{N}$, saadaan

$$\|Tx_p - Tx_q\| = \|T(x_p - x_q)\| \leq \|T\| \|x_p - x_q\|,$$

joten $(Tx_n) \subset F$ on Cauchyn jono. Koska F on Banachin avaruus, niin jonolla $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on raja-arvo $\widehat{T}(z) \in F$ (tässä vaiheessa $\widehat{T}(z)$ on vain merkintä, joka kertoo, että raja-arvo riippunee pisteestä z). Havaitaan seuraavaksi, että tämä raja-arvo on riippumaton jonon (x_n) valinnasta. Nimittäin, olkoon $(y_n) \subset M$ toinen jono jolle myös $z = \lim_n y_n$. Toistamalla edellinen päättely jonolle (y_n)

löydetään raja-alkio $u = \lim_n T y_n \in F$. Koska $\|x_n - y_n\| \rightarrow \|z - z\| = 0$, niin kuvauksen T jatkuvuuden nojalla

$$\bar{0} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n - y_n) = \lim_n T x_n - \lim_n T y_n = \widehat{T}(z) - u.$$

Siispä $u = \widehat{T}(z)$. Päättelemme tästä, että raja-arvo

$$\widehat{T}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n$$

riippuu vain pisteestä $z \in \overline{M}$ eikä lainkaan approksimoivan jonon valinnasta. Nyt siis $z \mapsto \widehat{T}(z)$ on kuvaus $\overline{M} \rightarrow F$. Jos $z \in M$ ja valitaan $x_n = z$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\widehat{T}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n = T z,$$

joten \widehat{T} on kuvauksen T laajennus.

Osoitetaan seuraavaksi, että \widehat{T} on lineaarinen kuvaus $\overline{M} \rightarrow F$. Olkoon $x, y \in \overline{M}$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. Valitaan sellaiset jonot $(x_n) \subset M$, $(y_n) \subset M$, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ ja } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Tällöin myös jono $(z_n) = (x_n + \alpha y_n) \subset M$ ja tämä jono suppenee kohti vektoria $x + \alpha y$. Siispä alkuosan perusteella

$$\widehat{T}(x + \alpha y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n + \alpha y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha T y_n = \widehat{T}(x) + \alpha \widehat{T}(y).$$

Edellisessä käytimme lisäksi operaattorin T lineaarisuutta sekä kolmioepäyhtälöä siihen, että raja-arvon voi jakaa kahteen osaan. Edellinen lasku siis osoittaa, että \widehat{T} on lineaarinen.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\|T\| = \|\widehat{T}\|$ (tästä seuraa että \widehat{T} on jatkuva sulkeumassa \overline{M}). Jos $z \in \overline{M}$, niin valitaan sellainen jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$, että $z = \lim_n x_n$. Tällöin

$$\widehat{T}z = \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n.$$

Koska $\|T x_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja koska kolmioepäyhtälön nojalla $\|x_n\| \rightarrow \|z\|$, niin

$$\|\widehat{T}z\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T x_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\| \|x_n\| = \|T\| \|z\|,$$

joten $\|\widehat{T}\| \leq \|T\|$ ja erityisesti \widehat{T} on jatkuva. Toisaalta, jos $z \in M$, niin

$$\|Tz\| = \|\widehat{T}z\| \leq \|\widehat{T}\| \|z\|,$$

joten myös $\|T\| \leq \|\widehat{T}\|$.

Vielä on osoitettava kuvauksen \widehat{T} yksikäsitteisyys. Olettakaamme, että S on jatkuva lineaarinen kuvaus $\overline{M} \rightarrow F$, jolle $Sz = Tz$ kaikilla $z \in M$. Koska kuvaus $S - \widehat{T}$ on jatkuva $\overline{M} \rightarrow F$, niin jokaisella $z \in \overline{M}$ on voimassa

$$Sz - \widehat{T}z = \lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n - Tx_n = 0,$$

kunhan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ on jono, jolle $x_n \rightarrow z$ kun $n \rightarrow \infty$. Siispä $Sz = \widehat{T}z$ kaikilla $z \in \overline{M}$ ja kuvaus \widehat{T} on siten yksikäsitteinen. \square

Lause 6.16 on eräs lineaarioperaattoreiden filosofian kulmakivistä. Esimerkkinä tarkastellaan *Fourier-muunnosta*.

6.17. **Esimerkki.** Jos $f \in L^1(\mathbb{R})$ on integroitava ja $k \in \mathbb{R}$, asetetaan

$$(F) \quad \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx \quad (\text{funktion } f \text{ Fourier-muunnos}).$$

Koska $|f(x)e^{-ikx}| = |f(x)|$, kun $x, k \in \mathbb{R}$, on yllä mainittu integraali hyvin määritelty kaikilla $f \in L^1(\mathbb{R})$. Koska Fourier-sarjojen L^2 -teoria on kaikkein toimivin (luku 5), haluaisimme määritellä Fourier-muunnoksen myös kaikille $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Ongelma: $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$, joten (F):ssa oleva integraali ei ole määritelty kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R})$ (tarkista, että esimerkiksi funktio $f(x) = \min\{1, |x|^{-1}\}$ kuuluu $L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$). Mikä neuvoksi?

Ratkaisu: Oletetaan aluksi, että $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Tällöin voidaan todistaa (ei kuitenkaan tehdä tässä) Parsevalin identiteetin vastine

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Toisin sanoen, jos $M = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, niin kuvaus $T : f \rightarrow \widehat{f}$ on lineaarinen isometria $\|\cdot\|_2$ -normissa. Lauseen 6.16 nojalla kuvaus T laajenee jatkuvaksi lineaarioperaattoriksi $\overline{M} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, missä lisäksi osoittautuu että $\overline{M} = L^2(\mathbb{R})$. Näin Fourier-muunnos \widehat{f} saadaan määriteltyä kaikille $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Nimittäin, jos $f \in L^2(\mathbb{R})$, niin $f \chi_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ kaikilla $n > 0$. Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa, että

$$\|f \cdot \chi_{[-n,n]} - f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\{x:|x| \geq n\}} |f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{kun } n \rightarrow \infty,$$

joten siis $\overline{M} = L^2(\mathbb{R})$ (tarkista yksityiskohdat!).

Yo. määrittelyprosessi voidaan kuvata myös konkreettisemmin. Nimittäin, jos $f \in L^2(\mathbb{R})$, niin edellä dominoidun konvergenssin ja Lauseen 6.16 nojalla

(yksikäsitteisyysosa!) saadaan myös

$$\widehat{f}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{kaikilla } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

NEUMANNIN SARJA

Jos E on Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(E)$ ja on olemassa jatkuva käänteiskuvaus $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, sanomme usein, että T on *kääntävä* (isomorfismin sijasta). Seuraavalla sovelluksissa hyödyllisellä menetelmällä, eli niin sanottulla *Neumannin sarjalla*, pystymme useissa tilanteissa selvittämään annetun operaattorin kääntyvyyden ja jopa määräämään käänteisoperaattorin eksplisiittisesti. Merkitsemme avaruuden E identtistä operaattoria $I = id_E$, siis $Ix = x$ kaikilla $x \in E$. Edelleen operaattorin T iteraatteja merkitsemme $T^0 = I$, $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$ (k kappaletta).

6.18. Lause (Neumannin sarja). *Olkoon E Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(E)$ jatkuva lineaarikuvaus. Jos $\|T\| < 1$, niin operaattori $I - T$ on kääntävä ja*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \dots$$

missä yo. sarja on absoluuttisesti suppeneva avaruudessa $\mathcal{L}(E)$.

Todistus. Lauseen 6.7 nojalla $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k < \infty,$$

mikä suppenee, sillä $\|T\| < 1$ ja oikean puoleisin sarja on geometrinen sarja. Koska $\mathcal{L}(E)$ on Banachin avaruus (Lause 6.6), niin Lauseen 3.23 sivulla 40 nojalla sarja

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n T^k \in \mathcal{L}(E)$$

suppenee. Tarkastellaan nyt osasummia S_n . Koska

$$(I - T)S_n = I + T + \dots + T^n - (T + T^2 + \dots + T^{n+1}) = I - T^{n+1} = S_n(I - T),$$

niin

$$\|(I - T)S_n - I\| \leq \|T\|^{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{kun } n \rightarrow \infty$$

eli rajalla $(I - T)S = I$. Vastaavasti nähdään, että $S(I - T) = I$, eli $I - T$ on bijektio ja S on operaattorin $I - T$ käänteisoperaattori. (Huomaa, että tulokuvaukset $U \mapsto UV$ ja $U \mapsto VU$ ovat jatkuvia Lauseen 6.7 nojalla, kun V on kiinteä jatkuva operaattori.) \square

6.19. **Esimerkki.** Palaamme jo johdantoluvussa sekä Banachin kiintopistelauseen yhteydessä tarkastelemaamme esimerkkiin (kts. Esimerkki 3.41 sivulla 54) eli tarkastelemme integraaliyhtälöä

$$(*) \quad f(x) + \int_0^1 K(x,t)f(t) dt = g(x), \quad x \in [0, 1],$$

missä $K \in C([0, 1] \times [0, 1])$ on jatkuva ja $\|K\|_\infty < 1$. Osoitamme nyt käyttämällä Neumannin sarjaa, että jos $g \in C(0,1)$, niin tällöin yhtälöllä (*) on yksikäsitteinen ratkaisu $f \in C(0,1)$. Asetetaan

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad f \in C(0, 1).$$

Olemme jo osoittaneet, että $T \in \mathcal{L}(C(0, 1))$ ja $\|T\| \leq \|K\|_\infty < 1$. Nyt voimme soveltaa Neumannin sarjaa operaattoriin $-T$, sillä $\|-T\| = \|T\| < 1$. Siispä operaattori $I + T = I - (-T)$ on kääntyvä, joten kirjoittamalla yhtälö (*) operaattorimuodossa ja käyttämällä operaattorin $I + T$ kääntyvyyttä sekä Neumannin sarjaa saamme

$$(I + T)f = g \iff f = (I + T)^{-1}g = \sum_{k=0}^{\infty} (-T)^k g.$$

Sivutuotteena konstruoimme ratkaisun $f \in C(0, 1)$ sarjana. (Saatua sarjaa kannattaa verrata Banachin kiintopistelauseen antamaan konstruktion, vrt. Esimerkki 3.41.)

Koska kääntyvyys on (oleellisesti) algebrallinen ominaisuus, niin kääntyvät operaattorit muodostavat ryhmän kaikkien jatkuvien operaattoreiden joukossa. Tämä seuraa seuraavasta huomiosta.

Huomautus. Merkitsemme $\text{Inv}(\mathcal{L}(E)) = \{T \in \mathcal{L}(E) : T \text{ kääntyvä}\}$. Jos $S, T \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$ niin yhdistetty kuvaus ST on kääntyvä ja $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$, koska $STT^{-1}S^{-1} = SS^{-1} = I$ ja $T^{-1}S^{-1}ST = T^{-1}T = I$. Lisäksi, jos $S \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$ niin myös S^{-1} on kääntyvä ja $(S^{-1})^{-1} = S$.

Neumannin sarjan avulla voimme myös tarkastella, minkälainen joukko kääntyvien operaattoreiden joukko on topologisessa mielessä.

6.20. **Lause.** *Olkoon E Banachin avaruus. Tällöin*

(i) *jos $T \in \mathcal{L}(E)$ on kääntyvä ja $S \in \mathcal{L}(E)$ toteuttaa arvion $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, niin tällöin $T - S$ on kääntyvä.*

(ii) *kääntyvien operaattorien joukko $\text{Inv}(\mathcal{L}(E)) = \{T \in \mathcal{L}(E) : T \text{ kääntyvä}\}$ muodostaa avoimen ryhmän avaruudessa $\mathcal{L}(E)$ operaattorintulon suhteen.*

Todistus. Koska $T \in \mathcal{L}(E)$ on kääntyvä, niin erotus $T - S$ voidaan esittää tulona $T - S = T(I - T^{-1}S)$. Oletuksen ja Lauseen 6.18 nojalla $\|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\| \|S\| < 1$, joten Neumannin sarjan nojalla operaattori $I - T^{-1}S$ on kääntyvä. Siispä edellisen huomautuksen nojalla myös tulo-operaattori $T(I - T^{-1}S) = T - S$ on kääntyvä. Tämä osoittaa väitteen (i). Kohta (ii) seuraa nyt edellisestä huomiosta, että kääntyvät operaattorit muodostavat ryhmän ja kohdasta (i), jonka nojalla kääntyvien operaattorien joukko on avoin. \square

Harjoitustehtäviä

6:1 Anna esimerkki jatkuvista lineaarikuvauksista $S, T \in \mathcal{L}(E)$ (sopivassa Banachin avaruudessa E), joille $\|ST\| < \|S\| \|T\|$. Voitko valita jopa $S = T$?

6:2 Määritellään kuvaus $T : C(0, 1) \rightarrow \ell^\infty$ kaavalla

$$Tf = (f(1/k))_{k \in \mathbf{N}} = (f(1), f(1/2), f(1/3), \dots), \quad f \in C(0, 1).$$

Näytä, että T on rajoitettu lineaarikuvaus $C(0, 1) \rightarrow \ell^\infty$ (sup-normi molemmissa), ja määrää sen normi $\|T\|$. Onko T injektio? Entä surjektio?

6:3 Olkoon $T(f) = f'$ (heikko derivaatta) kun $f \in H^1(0, 1)$. Näytä, että $T \in \mathcal{L}(H^1(0, 1), L^2(0, 1))$ ja määrää operaattorinormi $\|T\|$. [*Vihje:* Etsi funktioita $f_n \in H^1(0, 1)$ joille $\|f'_n\|_2 = 1$ ja $\|f_n\|_2 < \frac{1}{n}$ kun $n \in \mathbf{N}$.]

6:4 Varustetaan

$$C^\infty([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ äärettömän monta kertaa derivoituva}\}$$

sup-normilla $\|f\|_\infty = \sup\{|f(s)| : s \in [0, 1]\}$. Totea, että derivaattakuvaus $D : C^\infty([0, 1]) \rightarrow C^\infty([0, 1])$, $D(f) = f'$, on lineaarinen, mutta ei jatkuva.

6:5 Olkoon $T : \ell^1 \rightarrow \mathbf{K}$ lineaarikuvaus $T(x_k) = \sum_{k=1}^\infty x_k$. Näytä:

- (i) T on jatkuva $(\ell^1, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbf{K}$,
- (ii) T ei ole jatkuva $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbf{K}$.

6:6 Olkoon $1 \leq p < \infty$. Etsi sellainen jatkuva lineaarinen injektio $S : \ell^p \rightarrow \ell^p$, jonka kuva $\text{Im}(S) = \{Sx : x \in \ell^p\}$ ei ole suljettu avaruudessa ℓ^p . [*Vihje.* Riittää etsiä haluttu esimerkki diagonaalioperaattoreiden $(x_k) \mapsto (a_k x_k)$ joukosta, missä (a_k) on sopiva rajoitettu skalaarijono, ja muistaa HT 4:4]

6:7 Olkoon E ja F normiavaruuksia, sekä $T : E \rightarrow F$ lineaarikuvaus. Oletamme, että $(Tx_n) \subset F$ on rajoitettu jono aina kun jonolle $(x_n) \subset E$ on voimassa $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{0}$. Näytä, että T on jatkuva (eli rajoitettu).

6:8 Olkoon $T : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ lineaarikuvaus $T(x_k) = (\frac{k}{k+1}x_k)$, kun $x = (x_k) \in \ell^1$. Tutki, onko olemassa $x \in \ell^1$ jolle $\|x\|_1 = 1$ ja $\|Tx\|_1 = \|T\|$.

6:9 Olkoon E Banachin avaruus, ja $T \in \mathcal{L}(E)$ operaattori, jolle $\|T\| < 1$. Johda Neumannin sarjasta lähtien virhearvio

$$\|(I + T)^{-1} - I + T\| \leq \frac{\|T\|^2}{1 - \|T\|}.$$

6:10 Olkoon H Hilbertin avaruus ja $S \in \mathcal{L}(H)$ sellainen lineaarikuvaus, että

$$|(Sx|x)| \geq c\|x\|^2, \quad x \in H,$$

missä vakio $c > 0$. Näytä, että S on kääntyvä operaattori, ja $\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$. [*Muistutus*: surjektiivisuutta varten tutki vektoreita $x \in \text{Im}(S)^\perp$.]

6:11 Olkoon E Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(E)$ jatkuva lineaarinen kuvaus ja $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sellainen luku, että $\|T^n\| < |\lambda|^n$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Osoita Neumannin sarjan avulla, että $\lambda I - T$ on kääntyvä operaattori. [*Vihje*: pyri kirjoittamaan $\lambda^n I - T^n = (\lambda I - T)S = S(\lambda I - T)$ sopivalla operaattorilla $S \in \mathcal{L}(E)$.]

6:12 Olkoon $V : C(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$ Volterra operaattori

$$(Vf)(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad t \in [0, 1], \quad f \in C(0, 1).$$

Näytä induktiolla, että $\|V^n\| \leq \frac{1}{n!}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Päätele edellisestä tehtävästä, että Volterran integraaliyhtälöllä

$$\lambda f(t) - \int_0^t f(s)ds = g(t), \quad t \in [0, 1],$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $f \in C(0, 1)$ kaikilla annetuilla $g \in C(0, 1)$ ja skalaareilla $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.

6:13 Osoita, että Volterra integraaliyhtälöllä

$$\lambda f(t) - \int_0^t f(s)ds = g(t), \quad t \in [0, 1],$$

on yksikäsitteinen jatkuva ratkaisu $f \in C(0, 1)$ kaikilla annetuilla $g \in C(0, 1)$ ja skalaareilla $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. [*Vihje*. Olkoon $(Vf)(t) = \int_0^t f(s)ds$ kun $t \in [0, 1]$ ja $f \in C(0, 1)$. Osoita, että $\lambda^n I - V^n$ on bijektio jos $n \in \mathbb{N}$ on riittävän iso, käyttämällä Neumannin sarjaa ja arviota $\|V^n\| \leq \frac{1}{n!}$ (HT 4/9). Kaavasta $\lambda^n I - V^n = (\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} V + \dots + \lambda V^{n-2} + V^{n-1})(\lambda I - V)$ seuraa, että $\lambda I - V$ on bijektio.]

6:14 (*Heisenbergin epämääräisyysperiaate lineaarikuvauksille*) Olkoot A ja B lineaarikuvauksia $\ell^2 \rightarrow \ell^2$, joille $AB - BA = I_{\ell^2}$ (identtinen kuvaus). Todista, että silloin A ja B eivät molemmat voi olla rajoitettuja operaattoreita. [*Idea*. Verifioi ensin induktiolla, että

$$AB^n - B^n A = nB^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Jos olisi $A, B \in \mathcal{L}(\ell^2)$, niin johda tästä ristiriita riittävän suurilla n .]

7. TASAISEN RAJOITUKSEN PERIAATE

Täydellisyydestä puristetaan maksimaalinen hyöty seuraavan *Bairen lauseen* avulla. Bairen lause on keskeinen todistettaessa kahta funktionaalianalyysin ”kolmesta suuresta perustuloksesta”, nimittäin *tasaisen rajoituksen periaate* (tämä luku) sekä *avoimen kuvauksen lause* (luku 8). Kolmas näistä suurista perustuloksista (*Hahn–Banachin lause*) tulee dualiteetin yhteydessä luvussa 9, ja se *ei* perustu täydellisyyteen. Koska Bairen lauseella on lukuisia muitakin sovelluksia, tarkastelemme sitä yleisissä metrisissä avaruuksissa.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Palautetaan mieliin: pistejono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ on Cauchyn jono, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon, \quad \text{aina kun } p, q \geq n_\varepsilon.$$

Aivan kuten normiavaruuksienkin tapauksessa, metrinen avaruus (X, d) on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchyn jono $(x_n) \subset X$ suppenee: tosin sanoen, on olemassa $z \in X$, jolle $\lim_n d(x_n, z) = 0$.

Bairen lause käsittelee avoimia tiheitä osajoukkoja $V \subset X$. Esimerkkejä tällaisista ovat $V = \mathbb{R}^2 \setminus ([0, 1] \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$, tai vaikkapa $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Huomautus. Osajoukko $V \subset X$ on tiheä $\iff \bar{V} = X \iff B(x, r) \cap V \neq \emptyset$ kaikilla $x \in X, r > 0 \iff W \cap V \neq \emptyset$ kaikilla avoimilla $\emptyset \neq W \subset X$.

Seuraava topologislunteinen lause on nk. *Bairen lause* tai *Bairen kategorialause*, jonka esitti ensimmäisenä *Rene Baire* (1874–1932).

7.1. Lause (Bairen lause). *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus. Jos $V_j \subset X, j \in \mathbb{N}$, on **numeroituva** kokoelma avoimia tiheitä osajoukkoja, niin*

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \text{ on **tiheä** avaruudessa } X.$$

Erityisesti siis $\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \neq \emptyset$.

Todistus. (Kts. Väisälä: Topologia II, 10.8) *Todistusidea:* on osoitettava, että

$$B(x, r) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right) \neq \emptyset$$

kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$.

Koska V_1 on tiheä löytyy $y_1 \in V_1 \cap B(x, r)$. Joukko $V_1 \cap B(x, r)$ on avoin, joten on olemassa sellainen $0 < r_1 < r$, että sulkeuma $\overline{B(y_1, r_1)} \subset V_1 \cap B(x, r)$. Oletuksen nojalla V_2 on tiheä, joten löytyy $y_2 \in V_2 \cap B(y_1, r_1)$. Koska oikeanpuoleinen leikkausjoukko on avoin niin on olemassa sellainen $0 < r_2 < r_1/2$, että $\overline{B(y_2, r_2)} \subset V_2 \cap B(y_1, r_1)$.

Jatkamalla tätä konstruktiota saadaan pistejono $(y_n) \subset X$, jolle

$$\overline{B(y_n, r_n)} \subset V_n \cap B(y_{n-1}, r_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

missä $0 < r_n < 1/n$. Koska $y_m \in B(y_n, r_n)$ kaikilla $m \geq n$ konstruktion perustella, eli $d(y_m, y_n) < \frac{1}{n}$ kaikilla $m \geq n$, niin (y_n) on Cauchyn-jono. Koska (X, d) on täydellinen, on siis olemassa $z = \lim_n y_n$. Koska $y_m \in \overline{B(y_n, r_n)}$ kaikilla $m \geq n$, niin antamalla $m \rightarrow \infty$ pätee myös rajalla että $z \in \overline{B(y_n, r_n)} \subset V_n \cap B(x, r)$ kaikilla n . Näin siis piste $z \in B(x, r) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n)$. \square

Huomautus. Bairen lause ei päde ylinumeroituville perheille: joukko $V_t = \mathbb{R} \setminus \{t\}$ on avoin ja tiheä \mathbb{R} :ssä kaikilla $t \in \mathbb{R}$, mutta $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} V_t = \emptyset$.

Bairen lause tulee usein käyttöön seuraavassa (yhtäpitävässä) muodossa:

7.2. Seuraus. *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus, ja*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

missä $F_n \subset X$ on suljettu kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa sellainen indeksi $n_0 \in \mathbb{N}$, että joukko F_{n_0} sisältää avoimen pallon $B(x_0, r_0)$ sopivilla $x_0 \in X$ ja $r_0 > 0$ (erityisesti $\text{sisus } \text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$).

Todistus. Olkoon $V_n = X \setminus F_n$ kun $n \in \mathbb{N}$, jolloin $V_n \subset X$ on avoin kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, ettei joukko F_n sisällä avointa palloa $B(x, r)$ millään $n \in \mathbb{N}$, eli siis

$$V_n \cap B(x, r) \neq \emptyset \quad \text{kaikilla } x \in X, \quad r > 0 \text{ ja } n \in \mathbb{N}.$$

Siten V_n on tiheä ja avoin jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Nyt Bairen lause mukaan leikkaus $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ on tiheä avaruudessa X . Erityisesti siis löytyy sellainen alkio $x \in X$, että

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

(Oikeanpuoleisin yhtäsuuruus tulee de Morganin laista.) Toisaalta, yo. seikka on ristiriidassa oletuksen $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ kanssa. Siispä vastaoletus on väärä ja väite seuraa. \square

Muotoilemme aluksi ensimmäisen suurista lauseista ja todistamme sen soveltamalla Bairen lausetta.

7.3. Lause (Banach–Steinhausin lause eli tasaisen rajoituksen periaate). *Olkoon E Banachin avaruus, F normiavaruus ja $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ kokoelma jatkuvia lineaarikuvauksia $T_\alpha: E \rightarrow F$ (missä indeksijoukko $J \neq \emptyset$ on mielivaltainen). Tällöin on kaksi (toisensa poissulkevaa) vaihtoehtoa: joko*

(1) on olemassa sellainen luku $M < \infty$, että

$$\|T_\alpha\| \leq M \quad \text{jokaisella } \alpha \in J,$$

tai

(2) on olemassa kiinteä vektori $x \in E$, jolle

$$\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha x\| = \infty.$$

Erityisesti, jos $M(x) := \sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha x\| < \infty$ jokaisella $x \in E$, niin

$$\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha\| = \sup_{\alpha \in J} (\sup_{x \in B_E} \|T_\alpha x\|) < \infty.$$

Huomautus. Jos väite (1) ei toteudu, niin a priori on olemassa vektorit $x_\alpha \in E$ ($\alpha \in J$), joille $\|x_\alpha\| = 1$ ja $\sup_{\alpha} \|T_\alpha x_\alpha\| = \infty$. Väite (2) sanookin, että voidaan valita yksi ja sama vektori $x \in E$ kaikilla $\alpha \in J$.

Ennen kuin todistamme Banach–Steinhausin lauseen, tarkastelemme hieman sen käyttöä.

Ensimmäisenä tasaisen rajoituksen periaatteen sovelluksena osoitamme vahvan parannuksen pisteittäisen rajaoperaattorin jatkuvuudelle (katso Esimerkki 6.5 sivulla 119 ja Lause 6.6 sivulla 120).

7.4. Lause. *Olkoon E Banachin avaruus, F normiavaruus ja $(T_n) \subset \mathcal{L}(E, F)$ sellainen jono jatkuvia lineaarikuvauksia, että $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ on olemassa kaikilla $x \in E$. Tällöin $T \in \mathcal{L}(E, F)$, eli T on jatkuva lineaarikuvaus.*

Todistus. Kuvaus T on lineaarinen Lauseen 6.2 sivulla 118 nojalla. Oletuksen mukaan jono $(T_n x)$ suppenee avaruudessa F jokaisella $x \in E$. Siispä jono $(T_n x)$ on Cauchyn jono ja edelleen Lauseen 3.3 sivulla 32 mukaan rajoitettu. Näin

$$M(x) \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Siten Banach–Steinhausin Lauseen 7.3 nojalla löytyy sellainen $M < \infty$, että $\|T_n\| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Saadaan

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \cdot \|x\| \leq M \|x\|$$

kun $x \in E$, joten $\|T\| \leq M$. □

Lähtöavaruuden täydellisyys on edellä olennainen ehto:

7.5. Esimerkki. Esimerkissä 6.3 sivulla 118

$$\mathcal{P} = \left\{ x : x \text{ on } \mathbb{R}\text{-kertoiminen polynomi} \right\}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|,$$

$$T_n x = n \left(x(1) - x\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right), \quad \text{kun } x \in \mathcal{P},$$

Esimerkissä 6.3 näytettiin, että $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ ja $T_n x \rightarrow Tx$ kun $n \rightarrow \infty$, missä $Tx = x'(1)$, kun $x \in \mathcal{P}$. Lisäksi tällöin $T \notin \mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$, eli T ei ole jatkuva. Johtopäätökset:

- (i) $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ ei ole täydellinen (tämän seikan voisi toki todistaa suoraan, vrt. Huomautusta 3.11),
- (ii) Oletus, että E on Banachin avaruus on *olennainen* Lauseessa 7.4.

Koska olemme saaneet jo hieman esimakua Banach–Steinhausin lauseen tehokkuudesta ja voimasta, niin siirrymme lauseen todistukseen.

Banach–Steinhausin lauseen todistus. Olkoon

$$F(n, \alpha) := \{ x \in E : \|T_\alpha x\| \leq n \},$$

kun $\alpha \in J$, $n \in \mathbb{N}$. Kuvaus $f_\alpha: x \mapsto \|T_\alpha x\|$ on kahden jatkuvan kuvauksen yhdisteenä jatkuva. Siispä $F(n, \alpha) = f_\alpha^{-1}([0, n]) \subset E$ on suljettu joukko jokaisella $\alpha \in J$ ja jokaisella $n \in \mathbb{N}$, sillä joukko $[0, n] \subset \mathbb{R}$ on suljettu ja f_α on jatkuva (vrt. Väisälä: Topologia I, 6.13). Tällöin myös leikkausjoukko

$$F_n := \bigcap_{\alpha \in J} F(n, \alpha) \subset E \text{ on suljettu,}$$

sillä mielivaltainen leikkaus suljetuista joukoista on edelleen suljettu.

Oletetaan nyt, että vaihtoehto (2) *ei* päde. Väitteen todistamiseksi on siis osoitettava, että tällöin vaihtoehto (1) on välttämättä oltava voimassa (tässä askeleessa on Banach–Steinhausin lauseen epätriviaali osa).

Olkoon tätä varten $x \in E$ mielivaltainen. Koska oletimme, että vaihtoehto (2) *ei* päde, niin

$$\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha x\| < \infty.$$

Siten löytyy sellainen $n \in \mathbb{N}$, että

$$\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha x\| \leq n.$$

Siispä $x \in F(n, \alpha)$ jokaisella $\alpha \in J$ eli $x \in F_n$. Tästä seuraa heti, että

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Koska E on Banachin avaruus, niin Seurauksen 7.2 nojalla löytyy sellainen $N \in \mathbb{N}$ ja sellainen avoin pallo $B(x_0, r_0)$, että

$$(7.6) \quad B(x_0, r_0) \subset F_N.$$

Osoitamme lopuksi, että ehdosta (7.6) seuraa, että $\|T_\alpha x\| \leq 2N/r_0$ jokaisella $\alpha \in J$ ja jokaisella $x \in B_E$. Olkoon $x \in E$ ja $\|x\| < 1$. Tällöin $x_0 + r_0 x \in$

$B(x_0, r_0)$, joten $\|T_\alpha(x_0 + r_0x)\| \leq N$. Kuvauksen T_α lineaarisuuden nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\|T_\alpha x\| &= \frac{1}{r_0} \|T_\alpha(r_0x)\| = \frac{1}{r_0} \|T_\alpha(x_0 + r_0x) - T_\alpha(x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{r_0} (\|T_\alpha(x_0 + r_0x)\| + \|T_\alpha(x_0)\|) \leq \frac{2N}{r_0} =: M\end{aligned}$$

Siis $\|T_\alpha\| \leq M$ jokaisella $\alpha \in J$. \square

7.7. Esimerkki. Olkoon $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sellainen annettu lukujono, että reaalinen sarja

$$(7.8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{suppenee } \mathbb{R} : \text{ssä kaikilla jonoilla } (x_k) \in \ell^1.$$

Havaitaan aluksi, että jos $(a_k) \in \ell^\infty$ on rajoitettu jono, niin (7.8) toteutuu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |x_k| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty, \quad \text{kun } (x_k) \in \ell^1.$$

Siispä sarja $\sum a_k x_k$ suppenee (jopa itseisesti), kun jono $(x_k) \in \ell^1$. Herää kysymys, onko olemassa muita lukujonoja (a_k) , joille (7.8) on voimassa?

Osoitamme käänteisen suunnan eli jos lukujono (a_k) toteuttaa ehdon (7.8), niin $(a_k) \in \ell^\infty$. (Tämä esimerkki liittyy läheisesti luvun 9 duaalisuusteoriaan.)

Todistus. Asetetaan kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j x_j \quad \text{kun } x = (x_k) \in \ell^1.$$

Tällöin f_n on lineaarinen $\ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &= \left| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| |x_j| \leq \max_{k=1, \dots, n} |a_k| \sum_{j=1}^n |x_j| \\ &\leq \max_{k=1, \dots, n} |a_k| \cdot \|x\|_1 < \infty\end{aligned}$$

kaikilla $x = (x_k) \in \ell^1$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis f_n on jatkuva $\ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Oletuksen (7.8) nojalla on olemassa raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j x_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j =: f(x)$$

kaikilla $x = (x_k) \in \ell^1$. Koska ℓ^1 on Banachin avaruus, niin Lauseen 7.4 perusteella $f \in \mathcal{L}(\ell^1, \mathbb{R})$, eli f on jatkuva. Tällöin siis

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\|_1 \quad \text{kaikilla } x = (x_k) \in \ell^1.$$

Sijoitetamalla vektorit

$$x = e_k = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k:\text{mes}}, 0, 0, \dots) \in \ell^1, \quad k \in \mathbb{N},$$

kuvaukseen f havaitaan, että

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| = \sup_k |f(e_k)| \leq \sup_k \|f\| \|e_k\|_1 = \|f\| < \infty,$$

joten $(a_k) \in \ell^\infty$. □

BANACH–STEINHAUSIN LAUSEEN SOVELLUKSIA FOURIER-SARJOIHIN

Luvussa 5 osoitimme, että jokaisella L^2 -funktioilla f vastaava Fourier-sarja $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$ suppenee ainakin L^2 -normin mielessä, sekä Fejérin lauseen 5.4 nojalla jatkuvalla funktiolla f Fourier-osasummien *keskiarvo* suppenee tasaisesti kohti f :ää. Lisäksi muistamme, että C^1 -funktioilla f Fourier-sarja suppenee pisteittäin (Lause 5.9) kohti f :ää. Edellisten tietojen valossa seuraava tulos on yllättävä (tämä Banach–Steinhausin lauseen sovellus oli ainakin yllätys löytöaikanaan):

7.9. Lause. *On olemassa jatkuva 2π -jaksollinen funktio $f \in C(0, 2\pi)$, jonka Fourier-sarja*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

hajaantuu *pisteessä* $x = 0$.

Todistus. Olkoon

$$s_n(f; x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k)e^{ikx}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

n :s Fourier osasumma. Näytämme, että on olemassa sellainen jatkuva funktio $f \in C(0, 2\pi)$, jolla $f(0) = f(2\pi)$ ja

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n(f; 0)| = \infty,$$

mistä erityisesti seuraa, että funktion f Fourier-sarja hajaantuu, kun $x = 0$. Edelleen tästä seuraa, että $S_n(f; 0) \not\rightarrow f(0)$, kun $n \rightarrow \infty$.

Konstruktiossa tarvitaan myös joitakin luvun 5 tietoja. Lemman 5.2 sivulla 90 mukaan

$$s_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t) dt = (D_n * f)(x),$$

missä D_n on Dirichletin ydin

$$(7.10) \quad D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Asetetaan

$$(7.11) \quad \Lambda_n(f) = s_n(f; 0) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(-t) dt$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin kuvaus Λ_n on lineaarinen $C(0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$, ja

$$\begin{aligned} |\Lambda_n(f)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) D_n(-t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| |D_n(-t)| dt \\ &\stackrel{D_n(-t)=D_n(t)}{\leq} \frac{\|f\|_\infty}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt, \end{aligned}$$

kun $f \in C(0, 2\pi)$, joten $\|\Lambda_n\| \leq (2\pi)^{-1} \|D_n\|_1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Väitämme, että edellinen arvio on itse asiassa yhtäsuuruus, eli myös

$$(7.12) \quad \|\Lambda_n\| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Lisäksi väitämme, että

$$(7.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt = \infty.$$

(Yhdessä kaavan $\|\Lambda_n\| = (2\pi)^{-1} \|D_n\|_1$ ja tasaisen rajoituksen periaatteen kanssa tämä osoittaa väitteen, kuten tulemme pian huomaamaan.) Osoitetaan ensin jälkimmäinen raja-väite (7.13), sillä sen argumentti on suoraviivaisempi. Ideana on soveltaa Analyysistä tuttua arviota $|\sin(\frac{t}{2})| < \frac{t}{2} < t$ kun $t > 0$, esitykseen (7.10). Suoraan arvioimalla ja muuttujanvaihdon $s = (n + \frac{1}{2})t$ avulla saamme silloin

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt &\geq \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n + \frac{1}{2})t)|}{t} dt \geq \int_0^\pi |\sin((n + \frac{1}{2})t)| \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{(n+1/2)\pi} |\sin s| \frac{ds}{s} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin s| ds \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \longrightarrow \infty, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(koska harmoninen sarja $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ hajaantuu). Edellä tunnetusti $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \int_0^\pi |\sin t| dt = 2$ kaikilla k .

Osoitamme seuraavaksi epäyhtälön (7.12). Olkoon g_n funktio

$$g_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } D_n(-t) \geq 0 \\ -1, & \text{kun } D_n(-t) < 0 \end{cases}$$

jolloin siis $g_n(t)D_n(-t) = |D_n(-t)|$ kun $t \in [0, 2\pi]$. Tällöin on olemassa jono *jatkuvia* 2π -periodisia funktioita $(f_j) \subset C(0, 2\pi)$, joille

$$-1 \leq f_j(t) \leq 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(t) = g_n(t) \text{ pisteittäin kaikilla } t \in [0, 2\pi].$$

Tämä nähdään vertaamalla Lauseen 5.6 todistukseen tai tekemällä suora päätely. (Itse asiassa, $g_n = \chi_{F_n} - \chi_{F_n^c}$, missä funktion D_n jatkuvuuden nojalla joukko $F_n = \{t \in [0, 2\pi] : D_n(-t) \geq 0\}$ on suljettu. Haluttu funktiojono (f_j) on siis konstruoitu jo Lauseen 5.6 osissa (1) ja (2).)

tähän tulee kuva!!

Koska $\|f_j\|_\infty \leq 1$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$, niin Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen avulla (majoranttina funktiota $|D_n| \in L^1$) saadaan (7.11):sta

$$\begin{aligned} \|\Lambda_n\| &\geq \sup_{j \in \mathbb{N}} \Lambda_n(f_j) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \Lambda_n(f_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_j(t) D_n(-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n(t) D_n(-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(-t)| dt. \end{aligned}$$

Siis epäyhtälö (7.12) pätee, ja siten $\|\Lambda_n\| \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$. Nyt Banach–Steinhausin lauseen 7.3 vaihtoehto (2) jää jäljelle, koska suljimme juuri vaihtoehdon (1) pois. Siten on olemassa sellainen jatkuva 2π -jaksollinen $f \in C(0, 2\pi)$, jolle

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\Lambda_n(f)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n(f; 0)| = \infty,$$

mikä osoittaa väitteen. [*Kommentti:* Tarkasti ottaen, Lause 7.3 sovellettiin edellä kuvausten Λ_n rajoittumiin $\tilde{\Lambda}_n$ suljettuun vektorialiavaruuteen

$$C_{2\pi}(0, 2\pi) = \{f \in C(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi)\} \subset C(0, 2\pi).$$

Tämä on mahdollista, koska normin $\|\Lambda_n\|$ arvioinnissa kuvaukset $f_j \in C_{2\pi}(0, 2\pi)$ kaikilla j , joten $\|\tilde{\Lambda}_n\| = \|\Lambda_n\|$ kaikilla n . □

Lisätietoja Fourier-sarjoista: - Du-Bois–Reymond (1876): on olemassa *konkreettinen* jatkuva 2π -periodinen f , jonka vastaava Fourier-sarja $\sum \hat{f}(k)e^{ikx}$ hajaantuu pisteessä $x = 0$ (kts. [Körner: Fourier Analysis, luku 18]).

- Banach ja Steinhaus (1927): Lauseessa 7.9 oleva *ei-konstrukttiivinen* esimerkki.

- Kolmogorov (1926): on olemassa sellainen integroitava $f \in L^1(0, 2\pi)$, jonka Fourier-sarja hajaantuu *joka* pisteessä $x \in [0, 2\pi]$!

Muistamme, että jos $f \in L^2$, niin funktion f Fourier-sarja suppenee L^2 -normin mielessä. *Kysymys*: Onko sama voimassa avaruuden L^1 funktioille ?? Vastamme tähän negatiivisesti myös Banach–Steinhausin lauseen avulla.

7.14. Lause. *On olemassa sellainen $f \in L^1(0, 2\pi)$, että*

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \right\|_{L^1} \not\rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Todistus. Määritellään $T_n: L^1(0, 2\pi) \rightarrow L^1(0, 2\pi)$ asettamalla

$$(T_n f)(x) = s_n(f; x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} = (D_n * f)(x),$$

kun $f \in L^1(0, 2\pi)$, $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Kuvaus T_n on lineaarinen, koska Fourier-kerroin $f \mapsto \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ on lineaarinen kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Selvästi

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| |e^{ikt}| dt = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1,$$

kun $f \in L^1(0, 2\pi)$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Tästä saamme avaruuden L^1 kolmioepäyhtälön avulla trigonometrisen polynomin $T_n f$ normille yläarvion

$$\|T_n f\|_1 = \left\| \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \right\|_1 \leq \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)| \|e^{ikx}\|_{L^1} \leq (2n+1) \|f\|_1$$

kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$, joten $T_n: L^1(0, 2\pi) \rightarrow L^1(0, 2\pi)$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Palautamme vielä mieliin Fejérin ytimet (kts. Lemma 5.3 sivulla 91) luvusta 5:

$$K_j(x) = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^j D_k(x).$$

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ kiinteä. Tiedämme sivulla 91 olevan Lemman 5.3 sekä Fejérin Lauseen 5.4 (sivulla 92) perusteella, että $T_n(K_j) = D_n * K_j = K_j * D_n \rightarrow D_n$ tasaisesti välillä $[0, 2\pi]$ kun $j \rightarrow \infty$ (tässä Fejérin lause on sovellettu jatkuvaan funktioon D_n). Koska

$$\|T_n(K_j) - D_n\|_1 \leq 2\pi \|T_n(K_j) - D_n\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{kun } j \rightarrow \infty,$$

niin $\|T_n(K_j)\|_1 \rightarrow \|D_n\|_1$ kun $j \rightarrow \infty$. Lisäksi Lemman 5.3 perusteella $K_j \geq 0$ ja

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_j(t) dt = 1,$$

joten $(2\pi)^{-1} \|K_j\|_1 = 1$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Yhdistämällä saadaan siis

$$2\pi \|T_n\| \geq \sup_j \|T_n(K_j)\|_{L^1} \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \|T_n(K_j)\|_1 = \|D_n\|_1.$$

Edellisen Lauseen 7.9 todistuksen mukaan $\|D_n\|_1 \rightarrow \infty$, joten $\|T_n\| \rightarrow \infty$ kun $n \rightarrow \infty$. Siis Banach-Steinhausin lauseessa vaihtoehto (1) ei ole voimassa.

Näin siis Banach-Steinhausin vaihtoehto (2) jää ainoaksi mahdollisuudeksi, joten on olemassa funktio $f \in L^1(0, 2\pi)$ jolle

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(f)\|_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|s_n(f; \cdot)\|_1 = \infty.$$

Johtopäätökset: vastaava Fourier osasummien jono $(s_n(f; \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ ei voi supeta avaruudessa $L^1(0, 2\pi)$, joten erityisesti $\|f - s_n(f, \cdot)\|_1 \not\rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$.

□

Huomautus (Lisätietoja). (1) Edellinen Lause 7.14 (sekä toki em. Kolmogorovin tulos vuodelta 1926) näyttää, että Fourier-sarjojen yhteydessä avaruus L^1 poikkeaa huomattavasti avaruudesta L^2 . Herää kysymys, miten muut L^p -avaruudet käyttäytyvät? Voidaan todistaa (sivuutetaan tällä kurssilla), soveltamalla joko funktioteoriaa tai nk. *singulaarisia integraaleja*, että jos $1 < p < \infty$, niin funktion $f \in L^p(0, 2\pi)$ Fourier-sarja suppenee L^p -normissa kohti funktiota f , eli

$$\|f - s_n(f, \cdot)\|_p \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty,$$

kaikilla $f \in L^p(0, 2\pi)$.

(2) Pisteittäisestä suppenemisestä tiedetään, että jos $1 < p < \infty$ ja $f \in L^p(0, 2\pi)$, niin Fourierin osasummille pätee

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \quad \text{m.k. } x \in [0, 2\pi].$$

Tämä tulos on varsin syväallinen *Carlesonin–Huntin* lause 60-luvulta.

Harjoitustehtäviä

7:1 Olkoon E, F ja G Banach avaruuksia. Kuvaus $A : E \times F \rightarrow G$ on *bilineaarinen*, jos kuvaukset $A_1(y) : x \mapsto A(x, y)$ ja $A_2(x) : y \mapsto A(x, y)$ ovat lineaarisia kaikilla $x \in E$ ja $y \in F$. Osoita, että bilineaarinen kuvaus A on *rajoitettu*, eli

$$\sup\{\|A(x, y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} < \infty,$$

jos ja vain jos lineaarikuvaukset $A_2(x) : F \rightarrow G$ ja $A_1(y) : E \rightarrow G$ ovat jatkuvia kaikilla $x \in E$ ja $y \in F$. [*Taikasana*: tasaisen rajoituksen periaate].

7:2 Olkoon $(a_k) \subset \mathbf{R}$ sellainen annettu jono, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{suppenee kaikilla jonoilla } (x_k) \in c_0.$$

Näytä, että $(a_k) \in \ell^1$. [Vihje. Argumentoi Esimerkin 7.7 tavoin Banach-Steinhausin lausetta käyttäen.]

7:3 (Osgoodin tasaisen rajoituksen periaate, 1897) Olkoon $(f_n) \subset C(0, 1)$ jono jatkuvia funktioita $[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, jotka ovat *pisteittäin rajoitettuja*, eli $M(x) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |f_n(x)| < \infty$ kaikilla $x \in [0, 1]$. Osoita, että on olemassa avoin väli $(a, b) \subset [0, 1]$ ja luku $M < \infty$, siten että $|f_n(x)| \leq M$ kaikilla $x \in (a, b)$ ja $n \in \mathbf{N}$. [Vihje. Imitoi Banach-Steinhausin lauseen todistusta.]

7:4 Olkoon $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva funktio kaikilla $n = 1, 2, \dots$. Oletetaan, että äärellinen raja-arvo $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ on olemassa kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko $D(f) = \{x \in \mathbf{R} : f \text{ epäjatkuva pisteessä } x\}$ on *laiha*, eli $D(f) = \cup_{m=1}^{\infty} F_m$, missä sulkeumilla $\overline{F_m}$ ei ole sisäpisteitä. Päättele: pisteittäisellä rajafunktiolla f on ainakin yksi jatkuvuuspiste. [Vihje: aseta

$$F_{n,m} = \{x \in \mathbf{R} : |f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \frac{1}{m} \text{ kaikilla } k = 1, 2, \dots\}$$

ja tutki joukkoa $\cup_{m,n} (F_{m,n} \setminus \text{int}(F_{m,n}))$. Tässä $\text{int}(F_{m,n})$ on sisäpisteiden joukko.]

7:5 Olkoon E normiavaruus ja $M \subset E$ äärellisulotteinen vektoriavaruus. Näytä, että M on suljettu avaruudessa E . [Idea: olkoon (x_1, \dots, x_n) normitettu lineaarinen kanta aliavaruudelle M , sekä (e_1, \dots, e_n) tavallinen koordinaattikantajono avaruudessa \mathbb{K}^n . Olkoon $T : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow M$ lineaarikuvaus

$$T\left(\sum_{k=1}^n c_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n c_k x_k \quad \text{kun} \quad \sum_{k=1}^n c_k e_k \in \mathbb{K}^n.$$

Tällöin T on isomorfismi $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow M$. Käänteiskuvaus T^{-1} on jatkuva Lauseen 6.9 nojalla, koska $\{(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{k=1}^n |c_k| = 1\}$ on kompakti joukko Heine-Borelin lauseen nojalla.]

7:6 Olkoon

$$c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty} : x_n \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } n \in \mathbf{N}\}.$$

Osoita Bairen lauseen seurauksen 7.2 avulla ettei avaruudessa c_{00} ole sellaista normia $\|\cdot\|$, että $(c_{00}, \|\cdot\|)$ olisi Banach avaruus. [Vihje: $c_{00} = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, missä $F_n = [e_1, \dots, e_n]$ kun $n \in \mathbf{N}$ ja (e_n) on luonnollinen kantajono. HT:n 7:5 nojalla F_n on suljettu avaruudessa $(c_{00}, \|\cdot\|)$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Aliavaruuksilla F_n ei kuitenkaan ole sisäpisteitä, vrt. HT:n 2.5 argumenttia.]

7:7 Osoita, että ℓ^1 on *laiha* joukko avaruudessa ℓ^2 , eli

$$\ell^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

missä $\text{int}(\overline{D_n}) = \emptyset$, eli sulkeumilla $\overline{D_n}$ ei ole sisäpisteitä avaruudessa ℓ^2 kun $n \in \mathbf{N}$. [*Apu*: osoita, että $B_{\ell^1} \subset \ell^2$ on suljettu joukko, jolta puuttuu sisäpisteitä. LDK:n diskreetti versio sarjoille on tässä hyödyllinen.]

7:8 (ei-missään derivoituva funktio)

8. AVOIMEN KUKAUKSEN LAUSE

Palautamme aluksi mieleen Topologian kursseilta ehkä tutut perusasiat yleisestä avoimen kuvauksen käsitteestä. Määrittelemme ensin avoimen kuvauksen globaalien ehdon avulla.

8.1. Määritelmä. Jos X ja Y ovat metrisiä avaruuksia, niin kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on avoin, jos $f(U) = \{f(a) : a \in U\}$ on avoin avaruudessa Y aina, kun U on avoin joukko avaruudessa X .

Huomautus. Yleisemmin, jos X ja Y ovat topologisia avaruuksia niin avoin kuvaus $f: X \rightarrow Y$ määritellään samoin. Koska kurssin tarpeet liittyvät Banachin avaruuksiin, niin työympäristöksi riittää kuitenkin metriset avaruudet.

Avoim kuvaus $f: X \rightarrow Y$ voidaan myös yhtäpitävästi määritellä seuraavalla lokaalilla tavalla. (On hyvä huomata, että tulos on täysin analoginen vastaavaan yhteyteen pisteittäisen ja globaalien jatkuvuusehtojen välillä.)

8.2. Lause. Jos (X, d) ja (Y, d') ovat metrisiä avaruuksia, niin kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on avoin pisteessä $a \in X$ jos ja vain jos jokaista $r > 0$ vastaa sellainen $r' > 0$, että

$$B_{d'}(f(a), r') \subset f(B_d(a, r)).$$

Todistus.

” \Rightarrow ” Oletetaan, että f on avoin kuvaus, ja olkoon $a \in X$ sekä $r > 0$ mielivaltaisia. Koska $f(a) \in f(B_d(a, r))$, missä oletuksen perusteella $f(B_d(a, r))$ on avoin joukko Y :ssä, niin on olemassa sellainen $r' > 0$, että

$$B_{d'}(f(a), r') \subset f(B_d(a, r)).$$

” \Leftarrow ” Oletetaan, että Proposition ehto on voimassa. Jos $U \subset X$ on mielivaltainen avoin joukko ja $a \in U$, niin avoin pallo $B_d(a, r) \subset U$ sopivalla $r > 0$. Oletuksen nojalla olemassa sellainen $r' > 0$, että $B_{d'}(f(a), r') \subset f(B_d(a, r))$. Erityisesti siis $f(a)$ on joukon $f(U)$ sisäpiste. Koska tämä on voimassa jokaisella $a \in U$, niin $f(U)$ on avoin joukko Y :ssä \square

8.3. Esimerkki. (1) Kuvaus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ei ole avoin nollassa, sillä $f(-\varepsilon, \varepsilon) = [0, \varepsilon)$, mikä ei ole pisteen $0 = f(0)$ ympäristö. (Jatkuva kuvaus ei siis aina ole avoin.)

(2) Projektio $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x, y) = x$, on avoin jokaisessa tason \mathbb{R}^2 pisteessä, koska $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset P(B((x, y), r))$ kun $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja $r > 0$. Toisaalta, kuvaus $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, 0)$, ei ole avoin missään pisteessä; itse asiassa $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \times \{0\}$ ei sisällä yhtään avointa joukkoa.

(3) Olkoon $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$, missä τ_1 on tavallinen euklidinen topologia ja $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$, missä $\tau_2 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on diskreetti topologia. Tällöin identtinen kuvaus $\text{id} : X \rightarrow Y$ on avoin jokaisessa \mathbb{R} :n pisteessä, mutta ei jatkuva missään pisteessä.

8.4. *Huomautus.* Jatkuva kuvaus ei aina ole avoin (Esimerkki 8.3.(1)), eikä avoin kuvaus ole aina jatkuva (Esimerkki 8.3.(3)).

Kuinka avoimen kuvauksen käsite toimii lineaaristen kuvausten tapauksessa? Seuraava tulos näyttää, että lineaarisille kuvauksille avoimuus jo pisteessä $\bar{0}$ takaa avoimuuden (Vrt. Lause 2.30 sivulla 25).

8.5. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $T : E \rightarrow F$ lineaarinen. Tällöin T on avoin kuvaus jos ja vain jos T on avoin pisteessä $\bar{0}$, eli jokaista $r > 0$ vastaa sellainen $r' > 0$, että $T(B(\bar{0}, r)) \supset B(\bar{0}, r')$.*

Todistus.

” \Rightarrow ” Tämä suunta on todettu Propositionissa 8.2.

” \Leftarrow ” Oletetaan, että T on avoin pisteessä $\bar{0}$. Olkoon $x \in E$ ja $r > 0$. Silloin löytyy sellainen $r' > 0$, että $T(B(\bar{0}, r)) \supset B(\bar{0}, r')$. Täten kuvauksen T lineaarisuuden perusteella

$$T(B(x, r)) = T(x + B(\bar{0}, r)) = Tx + T(B(\bar{0}, r)) \supset Tx + B(\bar{0}, r') = B(Tx, r'),$$

eli T on avoin myös pisteessä x . Proposition 8.2 nojalla T on siis avoin kuvaus. \square

Havaitsemme, että jos E ja F ovat normiavaruuksia ja $T : E \rightarrow F$ on avoin lineaarikuvaus, niin T on surjektio. (HT 8:1). Tämä havainto tarkoittaa, että topologinen lisäoletus (avoimuus) implikoi algebrallisen tiedon (surjektiivisuus). Tavoitteenamme on nyt osoittaa, että yllättäen *Banachin* avaruuksien jatkuville lineaarikuvauksille T myös *käänteinen* väite pätee: surjektiivisuudesta (joka on pelkkä ”algebrallinen” ehto) seuraa, että T on avoin (joka on topologinen ehto!)

Ennen kuin todistamme tämän väitteen, muotoilemme tuloksen tarkasti. Seuraava lause on peräisin *Stefan Banachilta* (1892 – 1945).

8.6. **Lause** (Avoimen kuvauksen lause). *Jos E ja F ovat Banachin avaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on surjektio (eli $T(E) = F$), niin T on avoin kuvaus; erityisesti on siis olemassa sellainen $s > 0$, että*

$$B_F(\bar{0}, s) \subset T(B_E(\bar{0}, 1)).$$

Kuten tasaisen rajoituksen periaatteen yhteydessä, ennen kuin ryhdymme todistamaan väitettä, tarkastelemme hieman väitteen seurauksia.

8.7. Seuraus. Jos T on jatkuva lineaarinen bijektio Banachin avaruudesta E Banachin avaruuteen F , niin T on lineaarinen isomorfismi (eli käänteiskuvaus T^{-1} on jatkuva!).

Todistus. Käänteiskuvauksen T^{-1} jatkuvuuden $F \rightarrow E$ osoittamiseksi riittää verifioida, että alkukuva $(T^{-1})^{-1}(U)$ on avoin joukko avaruudessa F aina kun U on avoin joukko avaruudessa E (vrt. *Topologia I*, 4.8). Koska T on bijektio, niin $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$. Toisaalta, avoimen kuvauksen lauseen 8.6 nojalla T on avoin kuvaus $E \rightarrow F$, joten $T(U) = (T^{-1})^{-1}(U)$ on siten avoin joukko avaruudessa F . Näin T on lineaarinen isomorfismi. \square

8.8. Esimerkki. Olkoot $x \mapsto \|x\|_1$ ja $x \mapsto \|x\|_2$ normeja vektoriavaruudessa E joille $\|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$ kaikilla $x \in E$, missä $\beta > 0$. Tällöin identtinen kuvaus $I : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ on jatkuva lineaarinen bijektio. Jos lisäksi sekä $(E, \|\cdot\|_1)$ että $(E, \|\cdot\|_2)$ ovat Banachin avaruuksia, niin identtinen kuvaus I on Korollarin 8.7 nojalla isomorfismi, joten normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentteja. Toisin sanoen, on olemassa sellainen $\alpha > 0$, että

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \quad \text{kun } x \in E.$$

(Katso Lause 2.12 sivulla 15).

Erikoistapauksena tarkastelemme avaruudessa $C = C([0, 1], \mathbb{R})$ normeja

$$x \mapsto \|x\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|, \quad x \mapsto \|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt.$$

Tällöin $\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty$ kun $x \in C$, joten identtinen kuvaus $I : (C, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C, \|\cdot\|_1)$ on jatkuva lineaarinen bijektio. Mutta tiedämme myös, että normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_\infty$ eivät ole ekvivalentteja (tarkastele polynomeja $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$). Voidaan siis päätellä, että identtinen kuvaus $I : (C, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C, \|\cdot\|_1)$ ei ole avoin kuvaus, sillä se on jatkuva, mutta ei isomorfismi. Näin ollen täydellisyys on olennainen oletus avoimen kuvauksen lauseessa.

(Lisäkommentti: Tästä seuraa toki ohimennen myös, että $(C, \|\cdot\|_1)$ ei ole Banachin avaruus, sillä muuten avoimen kuvauksen lauseen nojalla $I : (C, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C, \|\cdot\|_1)$ olisi isomorfismi. Vaihtoehtoinen ja konkreettisempi tapa nähdä, että $(C, \|\cdot\|_1)$ ei ole Banachin avaruus on käyttää Lemmaa 5.6, jonka nojalla $(C, \|\cdot\|_1)$ on tiheä Banachin avaruudessa $L^1(0, 1)$. Jos $(C, \|\cdot\|_1)$ olisi Banachin avaruus, niin se olisi Lauseen 3.13 sivulla 35 nojalla suljettu avaruudessa $L^1(0, 1)$, mutta tiheyden nojalla tällöin saataisiin ristiriita $C(0, 1) = L^1(0, 1)$.)

Olemme valmiita aloittamaan avoimen kuvauksen lauseen todistamisen. Tarvitsemme ensin tärkeän aputuloksen, jonka todistamiseen käytetään Bairen

lausetta. Ennen apulauseen todistusta toteamme, että

$$\overline{A + B} \subset \overline{A + B},$$

aina kun A ja B ovat normiavaruuden E osajoukkoja. Nimittäin, olkoon $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellaiset $x_0 \in A$ ja $y_0 \in B$, että

$$\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad \|y - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

joten

$$\|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \varepsilon.$$

Siispä $x + y \in \overline{A + B}$. (Huomattakoon, että sisältyvyys $\overline{A + B} \subset \overline{A + B}$ voi olla aito, katso HT 2:??).

Muistutus: Jos E on normiavaruus, niin joukko $U \subset E$ on pisteen $a \in U$ ympäristö jos avoin pallo $B(a, r) \subset U$ jollakin $r > 0$.

8.9. Lemma. *Olkoon E normiavaruus, F Banachin avaruus ja T lineaarinen surjektio $E \rightarrow F$. Jos V on pisteen $\bar{0} \in E$ ympäristö avaruudessa E , niin sulkeuma $\overline{T(V)}$ on pisteen $\bar{0} \in F$ ympäristö avaruudessa F .*

Todistus. Koska V on pisteen $\bar{0} \in E$ ympäristö, on olemassa sellainen $B = B(\bar{0}, r)$, että $B + B \subset V$. Nimittäin, jos $B(\bar{0}, 2r) \subset V$, niin kolmioepäyhtälön perusteella $B(\bar{0}, r) + B(\bar{0}, r) \subset B(\bar{0}, 2r) \subset V$.

Jos $y \in F$ on mielivaltainen, niin $y = Tx$ jollakin $x \in E$, koska T on oletuksen nojalla surjektio. Valitaan sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $\|x\| < nr$, eli $x \in nB$. Siis

$$y \in T(nB) = nT(B) \subset n\overline{T(B)}.$$

Olemme näin havainneet, että

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(B)}.$$

Lisäksi tässä $n\overline{T(B)} = \overline{nT(B)}$, sillä kuvaus $x \mapsto nx$ on homeomorfismi $F \rightarrow F$ (vrt. *Topologia I*, 9.16). Koska F on Banachin avaruus, voimme soveltaa Bairen lausetta Seurauksen 7.2 muodossa: Siis ainakin yksi suljetuista joukoista $n\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon. Merkitsemme jatkossa selvyuden vuoksi avaruuden F palloja notaatiolla B_F .

Jos siis $B_F(x_0, \rho_0) \subset n\overline{T(B)}$, niin

$$B_F\left(\frac{x_0}{n}, \frac{\rho_0}{n}\right) = \frac{1}{n}B_F(x_0, \rho_0) \subset \overline{T(B)},$$

eli myös joukko $\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon. Merkitään $x = \frac{1}{n}x_0$ ja $\rho = \rho_0/n$, jolloin

$$B_F(x, \rho) \subset \overline{T(B)}.$$

Lisäksi pätee, että $-x \in \overline{T(B)}$. Nimittäin, koska $x \in \overline{T(B)}$, niin on olemassa sellainen approksimoiva jono $(y_n) \subset T(B)$, että $x = \lim_n y_n$. Koska $y_n \in T(B) = T(B(\bar{0}, r))$ niin symmetriasta seuraa, että $-y_n \in T(B)$ kaikilla n , joten

$$-x = \lim_n (-y_n) \in \overline{T(B)}.$$

Tämän avulla saamme kuvauksen T lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} B_F(\bar{0}, \rho) &= -x + B_F(x, \rho) \subset \overline{T(B)} + \overline{T(B)} \subset \overline{T(B) + T(B)} \\ &= \overline{T(B + B)} \subset \overline{T(V)}. \end{aligned}$$

Siis $\overline{T(V)}$ on pisteen $\bar{0} \in F$ ympäristö avaruudessa F . □

Avoimen kuvauksen lauseen todistus: Osoitamme, että T on avoin pisteessä $\bar{0}$. (Huomautamme, että Lemma 8.9 osoittaa melkein tämän, kunhan vain voimme korvata sulkeuman $\overline{T(V)}$ joukolla $T(V)$. Todistus perustuukin tämän seikan osoittamiseen.)

Olkoon $r > 0$ annettu, $r_0 = \frac{1}{2}r$ ja $r_k = 2^{-k}r_0$, kun $k \in \mathbb{N}$. Siis $r_k > 0$ ja

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} r_k.$$

Lemman 8.9 nojalla löydämme luvut $s_k > 0$, joille

$$B_F(\bar{0}, s_k) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_k))}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Jos $y \in \overline{T(B_E(\bar{0}, r_k))}$, niin $\|y\| \leq \|T\|r_k \rightarrow 0$, joten

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0.$$

Väite: $B_F(\bar{0}, s_0) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r))}$.

Tätä varten olkoon $y \in F$ ja $\|y\| < s_0$. Siispä $y \in \overline{T(B_E(\bar{0}, r_0))}$. Näin löytyy $x_0 \in B_E(\bar{0}, r_0)$, jolle

$$\|y - Tx_0\| < s_1,$$

eli $y - Tx_0 \in B_F(\bar{0}, s_1) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_1))}$. Vastaavasti jatkamalla havaitsemme, että on olemassa sellainen $x_1 \in B_E(\bar{0}, r_1)$, että

$$\|y - Tx_0 - Tx_1\| < s_2,$$

eli erotusvektori $y - Tx_0 - Tx_1 \in B_F(\bar{0}, s_2) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_2))}$.

Induktioaskel: jos $x_k \in B_E(\bar{0}, r_k)$ kun $0 \leq k \leq n-1$, ja

$$y - \sum_{k=0}^{n-1} Tx_k \in B_F(\bar{0}, s_n) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_n))},$$

niin on olemassa sellainen $x_n \in B_E(\bar{0}, r_n)$, että

$$\left\| \left(y - \sum_{k=0}^{n-1} Tx_k \right) - Tx_n \right\| = \left\| y - \sum_{k=0}^n Tx_k \right\| < s_{n+1}.$$

Jatkamalla saamme siten konstruotua jonon $(x_n)_{n=0}^\infty$ avaruudessa E , jolle $\|x_k\| < r_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=0}^{\infty} r_k = 2r_0 = r < \infty,$$

eli sarja $\sum_k x_k$ on absoluuttisesti suppeneva avaruudessa E . Koska E on täydellinen, niin Lauseen 3.23 sivulla 40 nojalla sarja $\sum_k x_k$ suppenee avaruudessa E . Merkitsemme vastaavaa summaa

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Tällöin edellisen arvion nojalla pätee

$$\|x\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < r,$$

joten $x \in B_E(\bar{0}, r)$. Lisäksi konstruktion perusteella

$$\left\| y - T\left(\sum_{k=0}^n x_k\right) \right\| = \left\| y - \sum_{k=0}^n Tx_k \right\| < s_{n+1} \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$, joten kuvauksen T jatkuvuuden perusteella

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} T\left(\sum_{k=0}^n x_k\right) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_k\right) = Tx.$$

Yhteenvetona olemme osoittaneet seuraavan: Jos $y \in F$ ja $\|y\| < s_0$, niin $y = Tx$, missä $x \in E$ ja $\|x\| < r$. Toisin sanoen, $T(B_E(\bar{0}, r)) \supset B_F(\bar{0}, s_0)$. Koska $r > 0$ oli mielivaltainen, on siis T avoin kuvaus pisteessä $\bar{0}$, joten T on Lauseen 8.5 nojalla avoin kuvaus. \square

Avoimen kuvauksen lauseella on myös seuraava käyttökelpoinen muotoilu:

8.10. Seuraus. Jos E ja F ovat Banachin avaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on surjektio, niin on olemassa sellainen $M < \infty$, että jokaista $y \in F$ kohti on olemassa $x \in E$, jolle $Tx = y$ ja $\|x\| \leq M\|y\|$.

Todistus. Avoimen kuvauksen lauseen nojalla on olemassa sellainen $s > 0$, että vastaava suljettu pallo

$$\{y \in F : \|y\| \leq s\} \subset T(B_E(\bar{0}, 1)).$$

Jos $y \in F$ on mielivaltainen, niin $\|s\frac{y}{\|y\|}\| = s$, joten on olemassa sellainen $z \in B_E(\bar{0}, 1)$, että $Tz = s\frac{y}{\|y\|}$. Linearisuudesta seuraa, että $T(\frac{\|y\|}{s}z) = y$, missä $\|\frac{\|y\|}{s}z\| \leq \frac{1}{s}\|y\|$. Voidaan siis valita $M = \frac{1}{s}$. \square

8.11. Seuraus. *Olkoot E ja F Banachin avaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ jatkuva lineaarinen injektio. Tällöin kuva-avaruus $T(E)$ on avaruuden F suljettu aliavaruus jos ja vain jos löytyy sellainen $\beta > 0$, että*

$$(8.12) \quad \|Tx\| \geq \beta\|x\| \quad \text{jokaisella } x \in E.$$

Ehto (8.12) sanoo, että T on *alhaalta rajoitettu* (vrt. Lause 6.9).

Todistus. ” \Rightarrow ” Oletetaan, että $T(E)$ on suljettu. Koska $T(E) \subset F$ on Banachin avaruuden suljettu aliavaruus, niin se on myös Banachin avaruus (Lause 3.13 sivulla 35). Nyt siis $T : E \rightarrow T(E)$ on jatkuva bijektio, joten väite seuraa suoraan avoimen kuvauksen lauseen Seurauksesta 8.10.

” \Leftarrow ” Jos ehto (8.12) pätee, niin

$$\beta\|x\| \leq \|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$$

jokaisella $x \in E$, koska T on myös jatkuva. Siispä $T : E \rightarrow T(E)$ on lineaarinen isomorfismi ja Lauseen 6.14 sivulla 122 nojalla $T(E)$ on täydellinen ja siten $T(E)$ on suljettu (Lause 3.13 sivulla 35). \square

Huomautus. Kaikki jatkuvat lineaariset injektiot $T \in \mathcal{L}(E, F)$ eivät ole alhaalta rajoitettuja. Esimerkiksi operaattori $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, $T(x_k) = (\frac{1}{k}x_k)$, kun $(x_k) \in \ell^2$, on jatkuva lineaarinen injektio. Toisaalta,

$$\|T(0, 0, \dots, 1, 0, \dots)\|_2 = \frac{1}{k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

joten T ei ole alhaalta rajoitettu. (Seurauksen 8.11 mukaan kuva $T(\ell^2)$ siis ei ole suljettu.)

SOVELLUS FOURIER-ANALYYSIIN

Muistamme, että jos $f \in L^2(0, 2\pi)$, niin sen Fourier-kertoimet $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ Besselin epäyhtälön nojalla, eli $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 < \infty$.

Kääntäen, Riesz–Fischerin lauseen mukaan, jos $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$, niin on olemassa $f \in L^2(0, 2\pi)$, jolle

$$\hat{f}(k) = a_k \quad \text{jokaisella } k \in \mathbb{Z}.$$

Tästä herää seuraavat kysymykset:

1. Onko L^1 -funktioille olemassa vastaava jonoista koostuva Banachin avaruus X , jolle $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in X$ kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$?
2. Onko Riesz–Fischerin lauseella vastinetta avaruudessa L^1 ?

Ensimmäiseen kysymykseen saadaan valoa *Riemann–Lebesguen lemmasta*. Olkoon

$$c_0(\mathbb{Z}) = \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} : x_k \in \mathbb{C} \text{ kaikilla } k \in \mathbb{Z}, \lim_{|k| \rightarrow \infty} x_k = 0\}$$

varustettuna sup-normilla $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|$. Tunnetusti $(c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

8.13. Lause (Riemann–Lebesguen lemma). *Jos $f \in L^1(0, 2\pi)$, niin*

$$(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z}).$$

Todistus: Jos $f \in L^1(0, 2\pi)$ ja $n \in \mathbb{Z}$, niin

$$(8.14) \quad |\widehat{f}(n)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| |e^{-int}| dt = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1.$$

Siis $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ on rajoitettu jono ja $\|(\widehat{f}(n))\|_\infty = \sup_n |\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1$.

Toisaalta Lauseen 5.4 sivulla 92 ja Lauseen 5.6 sivulla 94 nojalla trigonometriset polynomit ovat tiheässä avaruudessa $L^1(0, 2\pi)$. Jos $\varepsilon > 0$ on annettu, löydetään siis trigonometrinen polynomi

$$P(x) = \sum_{k=-m}^m a_k e^{ikx},$$

jolle on voimassa $\|f - P\|_1 < \varepsilon$. Edellä $\widehat{P}(n) = a_n$ kaikilla $|n| \leq m$ ja $\widehat{P}(n) = 0$ aina, kun $|n| > m$. Tätä havaintoa voidaan käyttää nyt hyväksi. Olkoon $|n| > m$. Tällöin

$$|\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(n) - \widehat{P}(n)| = |(\widehat{f - P})(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f - P\|_1 < \varepsilon,$$

joten päättelemme, että $|\widehat{f}(n)| \rightarrow 0$, kun $|n| \rightarrow \infty$, eli $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$. \square

Siis $X = c_0(\mathbb{Z})$ kelpaa hyvin (erääksi) vastaukseksi kysymykseen (1). Seuraavaksi vastataan kysymykseen (2) jonoavaruuden $X = c_0(\mathbb{Z})$ osalta, eli tarkastellaan onko Riemann–Lebesguen lemmän 8.13 käänteinen tulos voimassa (eli onko kysymykseen (2) vastaus myönteinen tässä tapauksessa). Avoimen kuvauksen lauseen avulla osoitamme seuraavaksi, että käänteinen tulos ei ole voimassa kun $X = c_0(\mathbb{Z})$.

8.15. Lause. *Kuvaus $T: f \mapsto (\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ on jatkuva lineaarinen injektio avaruudelta $L^1 = L^1(0, 2\pi)$ avaruuteen $c_0(\mathbb{Z})$. Kuva-avaruus $T(L^1)$ on tiheä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$, mutta T ei ole surjektio.*

Todistus. Selvästi T on lineaarinen, koska $f \mapsto \widehat{f}(k)$ on lineaarinen kaikilla k . Edellisen lauseen todistus näyttää, että T on jatkuva kuvaus $T: L^1 \rightarrow c_0$ ja

$\|T\| \leq (2\pi)^{-1}$. (Itse asiassa: $\|T\| = (2\pi)^{-1}$, sillä jos $f(t) \equiv 1$ kun $t \in [0, 2\pi]$, niin $\|f\|_1 = 2\pi$ ja $\|Tf\|_\infty = 1$, koska $\widehat{f}(0) = 1$ ja $\widehat{f}(k) = 0$, kun $k \neq 0$).

Näytetään seuraavaksi, että T on injektio. On osoitettava, että jos $Tf = \bar{0}$, eli $\widehat{f}(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin itse asiassa $f = \bar{0}$ (toisin sanoen, Fourierkertoimet $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ määräävät myös funktiot $f \in L^1$ yksikäsitteisesti).

Oletamme siis, että $Tf = \bar{0}$. Tällöin

$$(8.16) \quad \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt = \sum_{k=-m}^m a_k \int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt} dt = 2\pi \sum_{k=-m}^m a_k \widehat{f}(-k) = 0,$$

kaikilla trigonometrisilla polynomeilla $g = \sum_{k=-m}^m a_k e^{ikt}$. Fejerin lauseen 5.4 sivulla 92 ja Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen avulla (8.16) pätee myös kaikilla $g \in C(0, 2\pi)$ (mietä yksityiskohdat läpi; muista että approksimoiva keskiarvo $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(g, \cdot)$ on trigonometrinen polynomi).

Jos $A \subset [0, 2\pi]$ on mielivaltainen mitallinen joukko, niin Lauseen 5.6 sivulla 94 todistuksen nojalla löytyy sellainen jono $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(0, 2\pi)$, että

$$|g_n(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = \chi_A(t) \quad \text{m.k. } t \in [0, 2\pi].$$

Soveltamalla taas Lebesguen dominoidun suppenemisen lausetta, saamme että kaava (8.16) pätee myös funktioille $g = \chi_A$, eli

$$\int_A f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t)\chi_A(t) dt = \lim_n \int_0^{2\pi} f(t)g_n(t) dt = 0.$$

Tarkastellaan seuravaksi annettua funktiota $f \in L^1$. Jos $f \in L^1(0, 2\pi)$ on positiivinen funktio eli $f \geq 0$, niin olkoon $A_n = \{t \in [0, 2\pi] : f(t) > 1/n\}$ kun $n > 0$. Joukot A_n ovat mitallisia, koska f on mitallinen funktio. Soveltamalla kaavaa (8.16) joukon A_n karakteristiseen funktioon χ_{A_n} havaitaan että

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t)\chi_{A_n}(t) dt \geq \frac{1}{n}m(A_n).$$

Siispä $m(A_n) = 0$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, joten päättelemme mitan subadditiivisuuden nojalla, että myös joukon $A = \bigcup_n A_n$ mitta $m(A) = 0$. Koska

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t \in [0, 2\pi] : f(t) \geq 1/n\} = \{t \in [0, 2\pi] : f(t) > 0\},$$

olemme itse asiassa osoittaneet, että $0 \leq f(t) \leq 0$ m.k. $t \in [0, 2\pi]$, eli $f(t) = 0$ m.k. $t \in [0, 2\pi]$.

Olkoon lopuksi $f \in L^1$ mielivaltainen. Tällöin funktio f voidaan esittää muodossa (jakaamalla ensin reaali- ja imaginaariosiin)

$$f = (u_+ - u_-) + i(v_+ - v_-), \quad \text{missä } u_+, u_-, v_+, v_- \geq 0.$$

Edellisen päättelyn nojalla $u_+ = u_- = v_+ = v_- = 0$ melkein kaikkialla, joten $f(t) = 0$ m.k. $t \in [0, 2\pi]$. Olemme siis osoittaneet, että $\text{Ker}(T) = \{\bar{0}\}$, joten T on injektio.

Kuva $T(L^1)$ on tiheä: Olkoon $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in c_{00}(\mathbb{Z}) \subset c_0(\mathbb{Z})$ äärellisesti kannatettu jono, ts. $a_k = 0$, kun $|k| > m$ (jollakin $m \in \mathbb{N}$). Tällöin trigonometrinen polynomi

$$P(t) = \sum_{k=-m}^m a_k e^{ikt}$$

on L^1 -funktio, ja aikaisempien laskujen perusteella

$$\widehat{P}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m a_k \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} dt = \begin{cases} a_n, & \text{jos } |n| \leq m \\ 0, & \text{jos } |n| > m \end{cases}$$

Siis $T(P) = (\widehat{P}(k))_{k \in \mathbb{Z}} = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, joten $c_{00}(\mathbb{Z}) \subset T(L^1)$. Äärellisesti kannatetut jonot $c_{00}(\mathbb{Z})$ ovat (tunnetusti) tiheässä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$, eli $\overline{c_{00}(\mathbb{Z})} = c_0(\mathbb{Z})$, joten kuva $T(L^1)$ on tiheä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$.

Lopuksi osoitamme avoimen kuvauksen lauseen avulla, että $T(L^1) \neq c_0(\mathbb{Z})$, eli T ei ole surjektio. Nimittäin, jos T olisi surjektio, eli $T(L^1) = c_0(\mathbb{Z})$, niin silloin $T: L^1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$ olisi bijektio. Tällöin avoimen kuvauksen lauseen Seurauksen 8.10 nojalla T olisi isomorfismi, joten erityisesti olisi olemassa sellainen vakio $\beta > 0$, että

$$(8.17) \quad \|Tf\|_\infty \geq \beta \|f\|_1$$

jokaisella $f \in L^1$.

Toisaalta, Dirichlet'n ydin $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \in L^1$, ja $\|(\widehat{D}_n(k))\|_\infty = 1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi Lauseen 7.9 sivulla 137 todistuksessa osoitimme (kaava (7.13)), että $\|D_n\|_1 \rightarrow \infty$. Tämä on ristiriidassa arvion (8.17) kanssa, joten T ei voi olla surjektio. \square

Esitämme vielä *suljetun kuvaajan lauseen* (Lause 8.20 alla), joka on avoimen kuvauksen lauseen sovellus (jopa sen yhtäpitävä versio). Tämän keskeisen tuloksen avulla voidaan usein helpommin todistaa, että annettu lineaarikuvaus on jatkuva.

8.18. Määritelmä. Kuvauksen $f: X \rightarrow Y$ kuvaaja on joukko

$$G(f) = \{ (x, f(x)) \in X \times Y : x \in X \} \subset X \times Y.$$

Jos E ja F ovat normiavaruuksia, niin varustetaan seuraavassa tulovektoriavaruus $E \times F$ normilla

$$\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F, \quad (x, y) \in E \times F.$$

Tällöin $(E \times F, \|\cdot\|)$ on Banachin avaruus, jos E ja F ovat Banachin avaruuksia (tarkista!). Seuraava seikka on yleinen topologinen tieto:

8.19. Lause. *Olkoon E ja F normiavaruuksia sekä $f: E \rightarrow F$ jatkuva kuvaus. Tällöin funktion f kuvaaja $G(f) \subset E \times F$ on suljettu joukko.*

Todistus. Riittää osoittaa, että $\overline{G(f)} = G(f)$. Jos $(x, y) \in \overline{G(f)} \subset E \times F$, niin on olemassa sellaiset kuvaajan pisteparit $(x_n, f(x_n)) \in G(f)$ kun $n \in \mathbb{N}$, että

$$\|(x_n, f(x_n)) - (x, y)\|_{E \times F} = \|(x_n - x, f(x_n) - y)\| = \|x_n - x\| + \|f(x_n) - y\| \rightarrow 0$$

kun $n \rightarrow \infty$. Tällöin siis sekä $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ että $\|f(x_n) - y\| \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$. Koska oletimme, että f on jatkuva, niin myös $f(x_n) \rightarrow f(x)$ avaruudessa F kun $n \rightarrow \infty$. Raja-arvon yksikäsitteisyydestä seuraa silloin, että $y = f(x)$, eli $(x, y) = (x, f(x)) \in G(f)$. Siispä $G(f)$ on suljettu avaruudessa $E \times F$. \square

Jos $T: E \rightarrow F$ on lineaarinen kuvaus, niin sen kuvaaja $G(T)$ on avaruuden $E \times F$ vektorialiavaruus. Nimittäin, lineaarisuuden nojalla

$$\alpha(x, Tx) + \beta(y, Ty) = (\alpha x + \beta y, \alpha Tx + \beta Ty) = (\alpha x + \beta y, T(\alpha x + \beta y)) \in G(T)$$

kaikilla $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Suljetun kuvaajan lause kertoo, että Lauseen 8.19 käänteinen tulos pätee lineaarikuvauksille $T: E \rightarrow F$, kun E, F ovat Banachin avaruuksia.

8.20. Lause (Suljetun kuvaajan lause). *Olkoot E ja F Banachin avaruuksia, ja $T: E \rightarrow F$ sellainen lineaarikuvaus, että kuvaaja*

$$G(T) = \{ (x, Tx) : x \in E \} \subset E \times F \quad \text{on suljettu vektorialiavaruus.}$$

Tällöin T on jatkuva, eli $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

8.21. Huomautus. (1) Suljetun kuvaajan lause antaa uuden keinon lineaarisen kuvauksen T jatkuvuuden toteamiseen. Lauseen nojalla riittää verifioida, että $\overline{G(T)} = G(T)$, mikä on yhtäpitävää (vrt. Lauseen 8.19 argumentti) seuraavan ehdon kanssa: aina jos

$$(*) \quad \left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \quad \text{avaruudessa } E \text{ kun } n \rightarrow \infty \\ Tx_n \rightarrow y \quad \text{avaruudessa } F \text{ kun } n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \implies y = Tx.$$

Muistutus (vrt. *Topologia I*, 11.8): kuvaus $f: E \rightarrow F$ on jatkuva jos ja vain jos $f(x_n) \rightarrow f(x)$ kun $n \rightarrow \infty$ jokaisella jonolla $(x_n) \subset E$ jolle $x_n \rightarrow x$ kun $n \rightarrow \infty$, missä $x \in E$ on mielivaltainen. Huomaa, että ehto (*) on todellakin heikennys verrattuna em. yleiseen kriteeriin: jos jono $(x_n) \subset E$ suppenee E :ssa kohti vektoria x , niin ehdossa (*) on lisätietona myös että kuvajono (Tx_n) suppenee F :ssa!

(2) Suljetun kuvaajan lauseessa lineaarisuus on oleellinen oletus, sillä on olemassa epäjatkuva (ja epälineaarinen) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jonka kuvaaja $G(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on suljettu (HT 8:3).

Suljetun kuvaajan lauseen todistus: Koska $E \times F$ on Banachin avaruus ja kuvaaja $G(T)$ on suljettu vektorialiavaruus, niin $G(T)$ on Banachin avaruus (vrt. Lause 3.12 sivulla 35) avaruuden $E \times F$ normissa. Määritellään kuvaus $\psi : G(T) \rightarrow E$ asettamalla

$$\psi((x, Tx)) = x, \quad (x, Tx) \in G(T).$$

Koska T on lineaarinen, niin ψ on myös lineaarinen (tarkista!). Lisäksi ψ on bijektio, sillä ψ on selvästi surjektio sekä myös injektio: nimittäin

$$\bar{0} = \psi((x, Tx)) = x \implies (x, Tx) = (\bar{0}, \bar{0}).$$

Lisäksi ψ on rajoitettu, koska

$$\|\psi((x, Tx))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|, \quad (x, Tx) \in G(T).$$

Yhteenvedona ψ on siis jatkuva lineaarinen bijektio $G(T) \rightarrow E$. Nyt avoimen kuvauksen lauseen 8.6 (tai Seurauksen 8.7 muotoilun) nojalla myös käänteiskuvaus ψ^{-1} on jatkuva, joten ψ on lineaarinen isomorfismi. Seurauksen 6.11 sivulla 122 nojalla on siis olemassa sellainen vakio $\beta > 0$, että

$$\beta \|(x, Tx)\| \leq \|\psi((x, Tx))\| = \|x\| \quad \text{kaikilla } (x, Tx) \in G(T).$$

Tästä seuraa arvio

$$\beta \|Tx\| \leq \beta(\|x\| + \|Tx\|) = \beta \|(x, Tx)\| \leq \|x\|, \quad \text{kun } x \in E.$$

Siis $\|Tx\| \leq (1/\beta)\|x\|$, joten T on jatkuva. □

Seuraavassa tarkastellaan tyypillistä suljetun kuvaajan lauseen sovellusta.

8.22. Esimerkki. Olkoon $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ "ääretön" matriisi, joka toteuttaa ehdot:

(1) Matriisialkiot $a_{ij} \in \mathbb{C}$ muodostavat rajoitetun joukon, eli

$$M := \sup_{i,j \in \mathbb{N}} |a_{ij}| < \infty.$$

(2) Aina jos $s = (s_j) \in \ell^1$ on jono, ja

$$t_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} s_j, \quad i \in \mathbb{N},$$

niin $(t_i) \in \ell^1$.

Ehto (2) sanoo, että matriisi (a_{ij}) määrittelee lineaarikuvauksen $A : \ell^1 \rightarrow \ell^1$, jolle

$$As = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} s_j \right)_{i \in \mathbb{N}}, \quad \text{kun } s = (s_j) \in \ell^1.$$

Intuitiivisesti tämä voidaan ajatella seuraavasti:

$$As = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \text{kun } s = (s_j) \in \ell^1.$$

Väite: $A \in \mathcal{L}(\ell^1)$, eli A on jatkuva $\ell^1 \rightarrow \ell^1$.

Käytetään suljetun kuvauksen lausetta. Tätä varten olkoon $x^{(n)} \in \ell^1$ sellaisia jonoja (missä $n \in \mathbb{N}$), että $x^{(n)} \rightarrow x$ ja $A(x^{(n)}) \rightarrow y$ avaruudessa ℓ^1 kun $n \rightarrow \infty$. Merkitään $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ kun $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ja $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$. On osoitettava, että $Ax = y$.

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ kiinteä. Määritellään kuvaus $\Lambda : \ell^1 \rightarrow \mathbb{K}$ asettamalla

$$\Lambda u = (Au)_k, \quad u = (u_j) \in \ell^1.$$

(Tässä $(Au)_k$ on k :s koordinaatti jonolle $Au \in \ell^1$.) Oletuksen (2) perusteella Λ on todella määritelty $\ell^1 \rightarrow \mathbb{K}$, ja Λ on lineaarinen. Ehdosta (1) saadaan

$$|\Lambda u| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} u_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| |u_j| \leq M \|u\|_1, \quad u = (u_j) \in \ell^1,$$

joten Λ on jatkuva $\ell^1 \rightarrow \mathbb{K}$. Tällöin Λ :n jatkuvuuden ja suppenemisoletuksen nojalla

$$y_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax^{(n)})_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda x^{(n)} = \Lambda(\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}) = \Lambda x = (Ax)_k.$$

Olemme siis näyttäneet, että $y = Ax$, koska $k \in \mathbb{N}$ oli mielivaltainen koordinaatti. Näin suljetun kuvauksen lauseen nojalla A on jatkuva $\ell^1 \rightarrow \ell^1$.

(Harjoituksen vuoksi kannattaa yrittää osoittaa sama arvioimalla suoraan normia $\|Ax\|_1$, mikä ei ole aivan suoraviivaista.)

Harjoitustehtäviä

8:1 Olkoon E ja F normiavaruuksia, sekä $T : E \rightarrow F$ avoin lineaarikuvaus. Näytä, että T on surjektio. [*Kysymys.* Milloin kuvavektorialiavaruus $S(E)$ on avoin avaruudessa F ?]

8:2. Olkoon E ja F Banachin avaruuksia ja $A : E \rightarrow F$ sellainen jatkuva lineaarikuvaus, että kaikilla $y \in F$ on olemassa yksikäsitteinen vektori $x \in E$, jolle $Ax = y$. Näytä, että kuvaus $y \mapsto x$ määrittelee jatkuvan lineaarikuvauksen

$S : F \rightarrow E$, jolle $A(Sy) = y$ kun $y \in F$. [*Vihje:* avoimen kuvauksen lause tai suljetun kuvaajan lause.]

8:3 Etsi epäjatkuva kuvaus $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, jonka kuvaaja

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbf{R}\}$$

on suljettu tasossa \mathbf{R}^2 .

8:4. Olkoon E Banachin avaruus ja $M, N \subset E$ aliavaruuksia, joille $E = M \oplus N$ (siis $E = M + N$ ja $M \cap N = \{0\}$). Osoita, että lineaarinen projektio $P : E \rightarrow E$,

$$Px = m, \quad \text{kun } x = m + n \in M \oplus N = E,$$

on jatkuva jos ja vain jos M ja N ovat E :n suljettuja aliavaruuksia. [*Vihje:* päättele, että P on jatkuva suljetun kuvaajan lauseen avulla, jos M ja N ovat suljettuja.]

9. DUALITEETTI JA HAHN-BANACHIN LAUSEET

Jos E on vektoriavaruus jonka skalaarikunta on \mathbb{K} , niin merkintä $E^\dagger = L(E, \mathbb{K})$ tarkoittaa avaruuden E *algebraalista duaalia*. Duaalin E^\dagger alkioit ovat avaruuden E lineaarisia muotoja eli *funktionaaleja*. Jos $f \in E^\dagger$ ja $x \in E$, niin usein jatkossa merkitään $\langle x, f \rangle = f(x)$ funktiomerkin sijasta. Ehto $(x, f) \mapsto \langle x, f \rangle$ määrittelee niin sanotun *kanonisen bilineaarimuodon* $E \times E^\dagger \rightarrow \mathbb{K}$.

Normiavaruuden tapauksessa funktionaali $f \in E^\dagger$ voi olla jatkuva tai epä-jatkuva, joten on syytä määritellä:

9.1. Määritelmä. Jos E on normiavaruus jonka skalaarikunta on \mathbb{K} , niin $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ on avaruuden E (*topologinen*) *duaali*.

Siis $E^* = \{x^* : x^* \text{ on jatkuva lineaarikuvaus } E \rightarrow \mathbb{K}\}$ on jatkuvien lineaaristen funktionaalien muodostama avaruus, ja $E^* \subset E^\dagger$ on vektorialiavaruus.

Jos $E = c_{00}$ on äärellisesti kannatettujen jonojen muodostama vektoriavaruus varustettuna sup-normilla (vrt. Esimerkki 3.10 sivulla 34), niin

$$(c_{00})^* \neq (c_{00})^\dagger.$$

Nimittäin, olkoon $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (ykkönen n :ssa paikassa) kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin jono $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on normiavaruuden c_{00} lineaarinen kanta, koska $x = \sum_{k \in A} x_k e_k$ jokaisella $x = (x_k) \in c_{00}$, missä $A = \{k \in \mathbb{N} : x_k \neq 0\}$ on äärellinen joukko. Voidaan määritellä lineaarinen kuvaus $f : c_{00} \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla $f(e_n) = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin f ei ole rajoitettu, koska $|f(e_n)| = n \|e_n\|_\infty$ kaikilla n . Yleisemmin, voidaan osoittaa että $E^* = E^\dagger$ jos E on äärellisulotteinen (HT 9:5), ja $E^* \neq E^\dagger$ jos E on ääretönulotteinen (HT 9:6).

Jos $x^* \in E^*$, niin jatkuvan funktionaalin x^* normi on Lauseen 6.1 sivulla 117 nojalla

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle|.$$

Siis $(E^*, \|\cdot\|)$ on normiavaruus saman Lauseen 6.1 nojalla.

9.2. Lause. Jos E on normiavaruus, niin $(E^*, \|\cdot\|)$ on Banachin avaruus.

Todistus. Väite seuraa suoraan Lauseesta 6.6, koska $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, missä skalaarikunta \mathbb{K} on täydellinen. \square

On hyödyllistä ja tärkeää kyetä konkreettisesti identifioimaan duaaliavaruus E^* jos E on annettu Banachin avaruus. (Usein tämä on epä-triviaali tehtävä.)

9.3. Esimerkki. Olkoon $1 < p < \infty$ ja $q = p/(p-1)$, eli

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

joten p ja q ovat *duaali eksponentteja* (katso luku 2, Määritelmän 2.16 sivulla 16 jälkeinen teksti).

Väite: avaruuden $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ duaali on isometrisesti isomorfinen avaruuden $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$ kanssa.

Merkitään $e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \text{ kpl.}}, 1, 0, \dots) \in \ell^p$, kun $k \in \mathbb{N}$, ja

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n x_k e_k = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots), \quad x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p,$$

kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ avaruudessa ℓ^p , koska

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - s_n(x)\|_p^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right) = 0$$

(oikealla suppenevan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ jäännöstermi). Jos $x^* \in (\ell^p)^*$, $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin lineaarisuuden nojalla

$$\langle s_n(x), x^* \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \langle e_k, x^* \rangle =: \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

missä merkitsemme $y_k = \langle e_k, x^* \rangle$ kun $k \in \mathbb{N}$. Koska $\lim_n s_n(x) = x$ ja x^* on jatkuva, niin $\lim_n \langle s_n(x), x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$, joten

$$(9.4) \quad \langle x, x^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Näytämme seuraavaksi, että $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\langle e_k, x^* \rangle)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^q$. Merkitään tätä varten

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{|y_k|^q}{y_k}, & \text{kun } y_k \neq 0, \\ 0, & \text{kun } y_k = 0, \end{cases}$$

ja asetetaan $w_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \in \ell^p$ kun $n = 1, 2, \dots$. Tällöin havaitaan, että

$$\|w_n\|_p^p = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p = \sum_{k=1}^n |y_k|^{p(q-1)} = \sum_{k=1}^n |y_k|^q,$$

koska $p = \frac{q}{q-1}$. Sijoitetaan nyt kaavaan (9.4) vektorin x paikalle w_n , jolloin

$$(9.5) \quad \begin{aligned} A &:= \sum_{k=1}^n |y_k|^q = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k = \langle w_n, x^* \rangle = |\langle w_n, x^* \rangle| \leq \|w_n\|_p \|x^*\| \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/p} \|x^*\| = A^{1/p} \|x^*\|. \end{aligned}$$

Kerrotaan yhtälö (9.5) puolittain luvulla $A^{-1/p}$, jolloin

$$A^{1-1/p} = A^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q} \leq \|x^*\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Antamalla $n \rightarrow \infty$ saadaan $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ ja $\|y\|_q \leq \|x^*\|$.

Määrittelemme tämän perusteella kuvauksen $T: (\ell^p)^* \rightarrow \ell^q$ asettaen

$$Tx^* = y,$$

missä $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\langle e_k, x^* \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$. Suoraan määritelmästä seuraa, että T on lineaarinen kuvaus, ja edellä totesimme, että

$$\|Tx^*\|_q \leq \|x^*\|, \quad x^* \in (\ell^p)^*,$$

joten T on jatkuva. Jos $Tx^* = \bar{0}$, niin $\langle e_k, x^* \rangle = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, ja siis

$$\langle s_n(x), x^* \rangle = \sum_{k=0}^n x_k \langle e_k, x^* \rangle = 0,$$

kaikilla jonoilla $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$. Koska x^* on jatkuva ja $\lim_n s_n(x) = x$, niin rajalla $\langle x, x^* \rangle = 0$ jokaisella $x \in \ell^p$, eli $x^* = \bar{0}$. Näin T on injektio.

Kääntäen, jos $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $y = (y_k) \in \ell^q$, niin Hölderin epäyhtälön (Lause 2.20 sivulla 17) mukaan

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

Tästä seuraa, että kuvaus $\Lambda_y: x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ on jatkuva lineaarinen kuvaus $\ell^p \rightarrow \mathbb{K}$, joten Λ_y on eräs duaaliavaruuden $(\ell^p)^*$ alkio, ja lisäksi

$$\|\Lambda_y\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q} = \|y\|_q.$$

Määritellään kuvaus S ehdolla $y \mapsto \Lambda_y$, kun $y \in \ell^q$. Edellisen perusteella S on jatkuva lineaarinen kuvaus $\ell^q \rightarrow (\ell^p)^*$, ja $\|Sy\| \leq \|y\|_q$ jokaisella $y \in \ell^q$.

Jos $y = (y_k) \in \ell^q$, niin operaattorin S määritelmästä seuraa $\langle e_k, Sy \rangle = \Lambda_y(e_k) = y_k$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$, joten

$$TSy = (\langle e_k, Sy \rangle)_{k \in \mathbb{N}} = y \quad \text{kaikilla } y = (y_k) \in \ell^q.$$

Tästä päätellään, että $T((\ell^p)^*) = \ell^q$ (eli T on surjektio), ja koska T jo edellä todettiin injektiksi, se on siis bijektio. Lisäksi S on operaattorin T käänteiskuvaus T^{-1} yksikäsitteisyyden (= kuvauksen T injektiivisyyden) perusteella.

Olkoon lopuksi $x^* \in (\ell^p)^*$ ja $y = Tx^*$. Tällöin siis $Sy = x^*$ ja

$$\|x^*\| = \|Sy\| \leq \|y\|_q = \|Tx^*\|_q \leq \|x^*\|.$$

Tästä seuraa, että $\|Tx^*\|_q = \|x^*\|$, joten T on isometrinen isomorfismi $(\ell^p)^* \rightarrow \ell^q$. Voimme siten samaistaa avaruudet $(\ell^p)^*$ ja ℓ^q isometrian T välityksellä. (Tämän takia usein merkitäänkin $q = p'$.)

Koska p ja q ovat symmetrisessä asemassa, niin vastaavasti ℓ^p ja $(\ell^q)^*$ voidaan samaistaa keskenään isometrisesti isomorfisina avaruuksina. Siispä

$$((\ell^p)^*)^* \cong (\ell^q)^* \cong \ell^p.$$

(Tämä tulos voidaan ilmaista sanomalla, että ℓ^p on *refleksiivinen* avaruus, kun $1 < p < \infty$, vrt. Määritelmä 9.35 alla).

Jos $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $x^* = (y_k) \in \ell^q$, niin kanoninen bilineaarimuoto $\ell^p \times \ell^q \rightarrow \mathbb{K}$ (ja siten näiden avaruuksien duaaliteetti) voidaan konkreettisesti esittää muodossa (9.4):

$$\langle x, x^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Erikoistapauksessa $p = q = 2$ tarkasteltavana on Hilbertin avaruus ℓ^2 . Tällöin on edellisen esimerkin mukaan $(\ell^2)^* \cong \ell^2$ ja kanoninen bilineaarimuoto voidaan tulkita myös sisätuloksi:

$$\langle x, x^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{\overline{y_k}} = (x | \overline{y}),$$

missä $\overline{y} = (\overline{y_k})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Kuvaus $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (\overline{y_k})_{k \in \mathbb{N}} = \overline{y}$ on tässä tapauksessa liittolineaarinen, isometrinen bijektio $\ell^2 \rightarrow (\ell^2)^*$. Tämä on erikoistapaus allaolevasta Fréchet-Rieszin lauseesta 9.7.

9.6. Esimerkki. (1) Esimerkin 9.3 kaltaisella päättelyllä voidaan osoittaa, että avaruuden c_0 duaali c_0^* on isometrisesti isomorfinen avaruuden ℓ^1 kanssa (HT 9:3), ja avaruuden ℓ^1 duaali $(\ell^1)^*$ isometrisesti isomorfinen avaruuden ℓ^∞ kanssa. Sen sijaan avaruuden ℓ^∞ duaali $(\ell^\infty)^*$ ei ole isomorfinen avaruuden ℓ^1 kanssa. (Itse asiassa, duaalia $(\ell^\infty)^*$ ei voida esittää minään jonoavaruutena, vaan sen ”luonnollisen” esityksen muodostavat äärellisesti additiiviset joukkofunktiot $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{K}$, eli äärellisesti additiiviset mitat joukossa \mathbb{N} (kts. Köthe, Topologische Lineare Räume, §31).)

(2) [Lisätietoja] Olkoon $n \geq 1$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen osajoukko, sekä μ n -ulotteinen Lebesguen mitta avaruudessa \mathbb{R}^n . Olkoon $1 < p < \infty$. Silloin avaruuden $L^p(\Omega)$ duaali on luonnollisella tavalla isometrisesti isomorfinen avaruuden $L^q(\Omega)$ kanssa, missä q on jälleen p :n duaaliekspONENTTI. Tarkemmin sanoen: jokaista $\varphi \in (L^p(\Omega))^*$ vastaa yksikäsitteinen $g \in L^q(\Omega)$, jolle $\|\varphi\| = \|g\|_q$ ja

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x), \quad \text{kun } f \in L^p(\Omega).$$

(Katso esimerkiksi W. Rudin: *Real and Complex analysis*, Theorem 6.16. Tulos pätee myös tapauksessa $p = 1$ (jolloin $q = \infty$), mutta tulos ei ole voimassa, kun $p = \infty$.)

HILBERTIN AVARUUDEN DUAALI

Olkoon E Hilbertin avaruus jonka skalaarikunta on \mathbb{K} ja $x \in E$. Olkoon $f_x: E \rightarrow \mathbb{K}$ kuvaus

$$z \mapsto (z|x), \quad z \in E,$$

missä $(\cdot|\cdot)$ on sisätulo $E \times E \rightarrow \mathbb{K}$. Tällöin f_x on lineaarinen sisätulon ominaisuuksien nojalla. Cauchy–Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$|f_x(z)| = |(z|x)| \leq \|z\| \|x\|$$

jokaisella $z \in E$, joten f_x on jatkuva eli $f_x \in E^*$. Seuraavan keskeisen tuloksen mukaan Hilbertin avaruuden E jokainen jatkuva lineaarimuoto voidaan itse asiassa esittää sisätulon avulla muodossa $z \mapsto (z|x) = f_x(z)$, missä vektori $x \in E$ on yksikäsitteisesti määrätty ja vastaavan lineaarifunktionaalin normi $\|f_x\| = \|x\|$. Kuvausta $x \mapsto f_x$ sanotaan usein *kanoniseksi kuvaukseksi* $E \rightarrow E^*$.

9.7. Lause (Fréchet–Rieszin lause). *Jos E on Hilbertin avaruus ja $f_x(z) = (z|x)$, kun $x \in E$ ja $z \in E$, niin kuvaus $\Lambda: x \mapsto f_x$ määrittelee liittolineaarisen isometrisen bijektion $E \rightarrow E^*$.*

Todistus. Kuvauksen Λ liittolineaarisuus tarkoittaa, että Λ on additiivinen ja $\Lambda(cx) = \bar{c}\Lambda x$ kaikilla $x \in E$ ja $c \in \mathbb{K}$. Jälkimmäinen ominaisuus seuraa heti sisätulon ominaisuuksista: $f_{cx}(z) = (z|cx) = \bar{c}(z|x) = \bar{c}f_x(z)$ kaikilla $z \in E$. Edellä todettiin, että

$$|f_x(z)| \leq \|x\| \|z\|,$$

joten $f_x \in E^*$ ja $\|f_x\| \leq \|x\|$. Toisaalta, valitsemalla $z = x$ saadaan

$$\|x\|^2 = (x|x) = f_x(x) = |f_x(x)| \leq \|f_x\| \|x\|,$$

joten myös $\|x\| \leq \|f_x\|$. Siis $\|f_x\| = \|x\|$ kaikilla $x \in E$, eli kuvaus Λ on isometria $E \rightarrow E^*$.

Koska jokainen additiivinen isometria on injektio (ehdosta $f_x = f_y$ seuraa $\Lambda(x - y) = f_{x-y} = \bar{0}$), niin olemme jo osoittaneet, että kuvaus Λ on jatkuva liittolineaarinen injektio, joka on lisäksi isometria. Meidän on vielä näytettävä, että Λ on surjektio $E \rightarrow E^*$ (tämä on Fréchet–Rieszin lauseen varsinainen sisältö).

Olkoon siis $f \in E^*$ mielivaltainen. Jos $f = \bar{0}$, niin $f(z) = (z | \bar{0})$ jokaisella $z \in E$, eli $f = f_{\bar{0}}$. Voidaan siis olettaa, että $f \neq \bar{0}$. Merkitään

$$M = \text{Ker}(f) = \{ z \in E : f(z) = 0 \}.$$

Koska f on jatkuva ja yksiö $\{0\}$ on suljettu skalaarikunnassa \mathbb{K} , on $M = f^{-1}(\{0\})$ avaruuden E suljettu (*Topologia I*, 6.13) vektorialiavaruus. Lauseen 4.27 sivulla 74 nojalla $E = M \oplus M^\perp$, missä ortokomplementti $M^\perp = \{x \in E : x \perp z \text{ kaikilla } z \in M\}$. Koska $f \neq \bar{0}$, niin $M \neq E$ ja siten $M^\perp \neq \{\bar{0}\}$. Siispä voidaan kiinnittää sellainen $y \in M^\perp$, että $y \neq \bar{0}$.

Olkoon $z \in E$ mielivaltainen. Havaitaan, että tällöin lineaarisuuden perusteella

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0,$$

joten $f(z)y - f(y)z \in \text{Ker}(f) = M$. Koska $y \in M^\perp$, niin

$$0 = (f(z)y - f(y)z | y) = f(z)(y | y) - f(y)(z | y).$$

Edellä $(y | y) = \|y\|^2 > 0$ (koska $y \neq \bar{0}$), joten ratkaisemalla saadaan esitys

$$f(z) = \frac{f(y)}{\|y\|^2}(z | y) = \left(z \mid \frac{\overline{f(y)}}{\|y\|^2} y \right) =: (z | x), \quad \text{kun } z \in E,$$

missä $x = \frac{\overline{f(y)}}{\|y\|^2} y$. Olemme siis osoittaneet, että $f(z) = (z | x) = f_x(z)$ jokaisella $z \in E$, joten $f = f_x = \Lambda x$. Siten kuvaus Λ on surjektio $E \rightarrow E^*$. \square

Esimerkiksi, olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen osajoukko, sekä μ n -ulotteinen Lebesguen mitta avaruudessa \mathbb{R}^n , missä $n \geq 1$. Tällöin Fréchet–Rieszin lauseen 9.7 nojalla jokaista funktionaalia $\varphi \in (L^2(\Omega))^*$ vastaa yksikäsitteinen funktio $g \in L^2(\Omega)$, jolle $\|\varphi\| = \|g\|_2$ ja

$$\varphi(f) = (f | g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} d\mu(x), \quad \text{kun } f \in L^2(\Omega).$$

HAHN–BANACHIN LAUSEET

Olkoon E Hilbertin avaruus, $M \subset E$ sen suljettu aliavaruus, F normiavaruus ja $T \in \mathcal{L}(M, F)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Tällöin T voidaan jatkaa jatkuvaksi lineaarikuvaukseksi koko avaruuteen E , toisin sanoen, löytyy sellainen $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$, jolle $T_1 x = T x$, kun $x \in M$ ja vieläpä $\|T_1\| = \|T\|$. Tämä jatko saadaan käyttämällä ortoprojektiota $P_M: E \rightarrow M$ ja määrittelemällä $T_1 := T P_M$. (Jätämme lukijalle vapaaksi harjoitustehtäväksi näyttää, että T_1 on vaadittu jatko; luvusta 4 tarvitaan tieto, että jokaisella $x \in E$ on yksikäsitteinen esitys $x = x_1 + x_2$, missä $x_1 \in M, x_2 \in M^\perp$ sekä $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$).

Kuitenkin, jos edellä E onkin mielivaltainen Banachin avaruus, niin ei tällä *jatkamisongelmalla* ole aina ratkaisua. Esimerkiksi, jos $T = I: c_0 \rightarrow c_0$ on

identtinen kuvaus ja $M = c_0 \subset \ell^\infty = E$, niin *voidaan* osoittaa ettei ole olemassa jatkuvaa operaattoria $T_1 \in \mathcal{L}(\ell^\infty, c_0)$, jolle pätsi $T_1x = x$ kaikilla $x \in c_0$. (Syynä tähän on se varsin epä-triviaali seikka, ettei ole olemassa jatkuvaa lineaariprojektioita $P \in \mathcal{L}(\ell^\infty)$, jolle siis $P^2 = P$ ja kuva $P(\ell^\infty) = c_0$.)

Hahn–Banachin lauseet liittyvät paljon rajoitetumpaan jatkamisongelmaan, jossa tarkastellaan *lineaarisia funktionaaleja*, eli kuvausten maaliavaruutena on skalaarikunta $F = \mathbb{K}$. Hahn–Banachin lauseet liittyvät esimerkiksi myös seuraavaan ongelmaan: jos E on normiavaruus ja $x, y \in E$, $x \neq y$, niin löytyykö sellainen duaalin E^* alkio x^* , että

$$\langle x, x^* \rangle \neq \langle y, x^* \rangle?$$

Tämä on eräänlainen *tunnistamisongelma*; kykenemmekö me erottamaan avaruuden E vektoreita jatkuvilla lineaarisilla funktionaaleilla? (Yleisemmin, min-käläiset konveksit joukot voidaan ”separoida” toisistaan duaalin E^* alkioilla?)

Hahn–Banachin lauseet antavat näihin ongelmiin vastauksen. Tulos on varsin syvällinen, ja se on tietyssä mielessä ekvivalentti valinta-aksiomin kanssa (Zornin lemman välityksellä).

Aloitamme todistuksen seuraavalla (apu)tuloksella, jota kannattaa ajatella eräänlaisena induktioaskeleena, sillä todistuksessa myöhemmin käyttöön tuleva Zornin lemma on myös ekvivalentti ns. transfiniittisen induktion kanssa. Keskitymmme aluksi reaalikertoimiseen tapaukseen (kompleksiset vektoriavaruudet astuvat kuvaan Lauseessa 9.13).

9.8. Lemma. *Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on \mathbb{R} . Olkoon $M \subset E$ aito vektoriavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarinen funktionaali $M \rightarrow \mathbb{R}$, että $|f(u)| \leq p(u)$ aina, kun $u \in M$. Jos $z \in E \setminus M$ ja $M_1 = M \oplus \text{span}(z)$, niin tällöin on olemassa sellainen lineaarinen funktionaali $f_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$, että $f_1(u) = f(u)$ jokaisella $u \in M$ ja $|f_1(w)| \leq p(w)$ kaikilla $w \in M_1$.*

Todistus. Jos $x, y \in M$ ovat mielivaltaisia, niin

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f(x - y) \leq p(x - y) \leq p(x + z) + p(-y - z) \\ &= p(x + z) + p(y + z), \end{aligned}$$

koska p on seminormi avaruudessa E . Näin siis

$$-p(y + z) - f(y) \leq p(x + z) - f(x),$$

kaikilla $x, y \in M$. Koska edellisen arvion oikea puoli ei riipu vektorista $y \in M$, niin

$$\sup_{y \in M} (-p(y + z) - f(y)) \leq p(x + z) - f(x)$$

ja edelleen, koska tämän arvion vasen puoli ei riipu vektorista $x \in M$, niin

$$\sup_{y \in M} (-p(y+z) - f(y)) \leq \inf_{x \in M} (p(x+z) - f(x)).$$

Tästä voimme päätellä, että on olemassa sellainen vakio $c \in \mathbb{R}$, että

$$(9.9) \quad -p(y+z) - f(y) \leq c \leq p(x+z) - f(x)$$

kaikilla $x, y \in M$.

Vakion c avulla saamme nyt halutun laajennuksen määriteltyä aliavaruuteen M_1 . Jos $w \in M_1 = M \oplus \text{span}(z)$, niin $w = u + \lambda z$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ ovat yksikäsitteiset (tarkista!). Määritellään $f_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_1(w) = f_1(u + \lambda z) = f(u) + \lambda c,$$

missä c on epäyhtälöparissa (9.9) esiintyvä vakio. (Erityisesti siis $f_1(z) = c$ kun valitaan $u = \bar{0}$ ja $\lambda = 1$.) Tällöin $f_1 \in (M_1)^\dagger$ esityksen yksikäsitteisyyden perusteella, ja $f_1(u) = f(u)$ jokaisella $u \in M$.

Väite: $|f_1(w)| \leq p(w)$ kaikilla $w \in W_1$.

Tapaus $\lambda = 0$ on selvä, koska $|f| \leq p$ aliavaruudessa M . Voidaan siis olettaa, että $\lambda \neq 0$. Epäyhtälöparista (9.9) seuraa valitsemalla $x = y = \lambda^{-1}u \in M$, että

$$-p(\lambda^{-1}u + z) - f(\lambda^{-1}u) \leq c \leq p(\lambda^{-1}u + z) - f(\lambda^{-1}u),$$

kun $u \in M$ ja siis

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(u + \lambda z) - \frac{1}{\lambda}f(u) \leq c \leq \frac{1}{|\lambda|}p(u + \lambda z) - \frac{1}{\lambda}f(u).$$

Tämä on yhtäpitävä epäyhtälöparin

$$(9.10) \quad -\frac{1}{|\lambda|}p(w) \leq c + \frac{1}{\lambda}f(u) \leq \frac{1}{|\lambda|}p(w)$$

kanssa. Koska $w = u + \lambda z$, niin

$$c + \frac{1}{\lambda}f(u) = \frac{1}{\lambda}(f(u) + \lambda c) = \frac{1}{\lambda}f_1(w),$$

ja havaitaan, että epäyhtälöpari (9.10) voidaan kirjoittaa muodossa

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(w) \leq \frac{1}{\lambda}f_1(w) \leq \frac{1}{|\lambda|}p(w) \quad \text{eli } |f_1(w)| \leq p(w).$$

Tämä osoittaa väitteen. □

Lemma 9.8 ilmaisee siis sen, että seminormin rajoittama vektorialiavaruuden lineaarimuoto voidaan jatkaa samanlaiseksi muodoksi yhtä dimensiota laajempaan avaruuteen. Seuraavaksi osoitetaan, että se voidaan jatkaa koko avaruuteen. Tähän tarkoitukseen käytetään *Zornin lemmaa* (kts. Väisälä: Topologia II, Liite, ss. 170-173), ja todistuksen tämä osa on eräänlainen maksimalisuusargumentti.

9.11. Lause (Hahn–Banach). *Olkoon E \mathbb{R} -vektoriavaruus, M sen vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarinen funktionaali $M \rightarrow \mathbb{R}$, että $|f(u)| \leq p(u)$, kun $u \in M$. Tällöin on olemassa sellainen lineaarinen funktionaali $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, että $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$ ja $|g(x)| \leq p(x)$, kun $x \in E$.*

Todistus. Todistuksen alkuun tarvitsemme hieman määritelmiä. Jos N_1, N_2 ovat avaruuden E vektorialiavaruuksia, $h_1 \in L(N_1, \mathbb{R})$ ja $h_2 \in L(N_2, \mathbb{R})$ ovat funktionaaleja, niin asetamme

$$h_1 \prec h_2 \iff N_1 \subset N_2 \text{ ja } h_2(x) = h_1(x) \text{ kaikilla } x \in N_1.$$

Jos $N \supset M$ on avaruuden E vektorialiavaruus, niin asetamme

$$\mathcal{F}_N = \{ h \in L(N, \mathbb{R}) : f \prec h, \text{ ja } |h(x)| \leq p(x) \text{ kaikilla } x \in N \}.$$

Merkitsemme lopuksi

$$\mathcal{F} = \bigcup \{ \mathcal{F}_N : N \text{ on avaruuden } E \text{ aliavaruus ja } N \supset M \}.$$

Tällöin $f \in \mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}$, joten $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Edelleen havaitsemme, että (\mathcal{F}, \prec) muodostaa osittain järjestetyn joukon. Tämä tarkoittaa, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa \mathcal{F} :ssa (kohdat (i) - (iii) voidaan helposti verifioida määritelmistä):

- (i) $h \prec h$ kaikilla $h \in \mathcal{F}$,
- (ii) jos $h_1 \prec h_2$ ja $h_2 \prec h_1$, niin $h_1 = h_2$,
- (iii) jos $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{F}$ ja $h_1 \prec h_2$ sekä $h_2 \prec h_3$, niin $h_1 \prec h_3$. (Kohdat (i) - (iii) voidaan helposti verifioida määritelmistä.)

Olkoon

$$\mathcal{G} = \{ h_i \in \mathcal{F}_{N_i} : i \in \mathcal{I} \}$$

jokin joukon \mathcal{F} täysin järjestetty osaperhe. Tämä tarkoittaa, että jos $h, g \in \mathcal{G}$, niin $h \prec g$ tai $g \prec h$.

Yhdiste

$$N = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} N_i$$

on avaruuden E vektorialiavaruus, kuten helposti huomataan sen perusteella, että \mathcal{G} on täysin järjestetty. (Jos $x \in N_i$ ja $y \in N_j$, niin $N_i \subset N_j$ tai $N_j \subset N_i$. Ensimmäisessä tapauksessa $x + y \in N_j$ ja jälkimmäisessä $x + y \in N_i$.) Voimme määritellä lineaarimuodon $k \in L(N, \mathbb{R})$ asettamalla

$$k(x) = h_i(x), \quad \text{kun } x \in N_i.$$

Kuvaus k on hyvin määritelty, sillä jos $x \in N_i \cap N_j$, niin tällöin $h_i(x) = h_j(x)$. Kuvauksen k lineaarisuus seuraa jälleen välittömästi siitä, että \mathcal{G} on täysin

järjestetty. Suoraan kuvauksen k määritelmästä saadaan, että $k \in \mathcal{F}$ ja $h_i \prec k$ kaikilla $i \in \mathcal{I}$. Toisin sanoen, k on osaperheen \mathcal{G} yläraja perheessä (\mathcal{F}, \prec) .

Zornin lemman (kts. Väisälä, *Topologia II*, Z.4.-Z.5) nojalla joukossa \mathcal{F} on siten (ainakin yksi) maksimaalinen alkio $g: W \rightarrow \mathbb{R}$. (*Maksimaalisuus* tarkoittaa tässä, ettei ole olemassa $h \in \mathcal{F}$ jolle $g \prec h$ ja $g \neq h$. Tosin sanoen, jos $g \prec h$ ja $h \in \mathcal{F}$, niin $h = g$.) Koska $g \in \mathcal{F}$, niin määritelmän nojalla $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in M$ ja $|g(w)| \leq p(w)$ kaikilla $w \in W$.

Väite. Kuvaus g on etsitty laajentava funktionaali, eli $W = E$.

Vastaoletus: $W \neq E$, jolloin on olemassa $z \in E \setminus W$. Lemman 9.8 nojalla löytyy sellainen lineaarimuoto $g_1: W_1 = W \oplus \text{span}(z) \rightarrow \mathbb{R}$, että $g(x) = g_1(x)$ kun $x \in W$ ja lisäksi $|g_1(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in W_1$. Todistuksen merkinnöin tämä tarkoittaa, että $g_1 \in \mathcal{F}_{W_1}$ ja $g \prec g_1$. Siispä $g_1 \in \mathcal{F}$, mutta $g \neq g_1$, joten saadaan ristiriita ettei g olekaan maksimaalinen alkio \mathcal{F} :ssa. \square

Lauseen 9.11 perustyyppi on ensimmäisen kerran esiintynyt (hieman rajoitetummassa muodossa) eräässä Hans Hahnin julkaisussa vuonna 1927, ja hiukan Lausetta 9.11 yleisemmässä muodossa Stefan Banachilla vuodelta 1929. Näissä on oleellista se, että E on reaalinen vektoriavaruus. Tämän lauseen yleistivät kompleksiseen vektoriavaruuteen vuonna 1938 samanaikaisesti Yhdysvalloissa Bohnenblust ja Sobczyk, sekä Neuvostoliitossa Suhomlinov.

Tarkastelemme tätä varten ensin tarkemmin \mathbb{C} -lineaarisen ja \mathbb{R} -lineaarisen funktionaalien yhteyksiä. Olkoon E kompleksinen vektoriavaruus. Koska \mathbb{R} on kompleksilukujen \mathbb{C} alikunta, on siis tulo λx määritelty, kun $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $x \in E$, joten E on luonnollisella tavalla varustettu myös \mathbb{R} -vektoriavaruuden struktuurilla. Merkitsemme E_r :llä avaruutta E tulkittuna reaaliseksi vektoriavaruudeksi.

Olkoon E kompleksinen vektoriavaruus ja $f \in E^\dagger$, eli f on \mathbb{C} -lineaarinen funktionaali $E \rightarrow \mathbb{C}$. Merkitsemme

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \text{ kun } x \in E,$$

missä reaali- ja imaginaariosat

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}) \in \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{2i}(f(x) - \overline{f(x)}) \in \mathbb{R}$$

kun $x \in E$. Tällöin f_1, f_2 ovat \mathbb{R} -lineaarisia kuvauksia $E_r \rightarrow \mathbb{R}$ (mieti miksi!). Koska $f(ix) = if(x)$, kun $x \in E$, niin saadaan

$$f_1(ix) + if_2(ix) = f(ix) = i(f_1(x) + if_2(x)) = if_1(x) - f_2(x).$$

Tästä seuraa, että

$$f_1(ix) = \text{Re}(f(ix)) = \text{Re}(if_1(x) - f_2(x)) = -f_2(x),$$

eli $f_2(x) = -f_1(ix)$. Olemme siis saaneet esityksen

$$(9.12) \quad f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \quad x \in E.$$

Kääntäen, jos f_1 on \mathbb{R} -lineaarinen funktionaali $E_r \rightarrow \mathbb{R}$, eli $f_1 \in (E_r)^\dagger$, niin asetamme

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \quad x \in E.$$

Siis f on kuvaus $E \rightarrow \mathbb{C}$. Koska $f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y)$, niin välittömästi toteamme kuvauksen f määritelmän nojalla, että $f(x+y) = f(x) + f(y)$ kaikilla $x, y \in E$. Jos $x \in E$, niin

$$f(ix) = f_1(ix) - if_1(-x) = f_1(ix) + if_1(x) = i(f_1(x) - if_1(ix)) = if(x).$$

Olkoon nyt $c = a + ib \in \mathbb{C}$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, ja olkoon $x \in E$. Edellä tehtyjen havaintojen nojalla on tällöin

$$f(cx) = f((a+ib)x) = f(ax) + f(ibx) = af(x) + if(bx) = (a+ib)f(x) = cf(x).$$

Siis f on \mathbb{C} -lineaarinen funktionaali $E \rightarrow \mathbb{C}$, eli $f \in E^\dagger$.

Olemme siten todenneet, että algebrallisen duaalin E^\dagger alkiot ovat täsmälleen ne kuvaukset $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, jotka voidaan esittää muodossa

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \quad x \in E,$$

missä f_1 on \mathbb{R} -lineaarinen funktionaali $E_r \rightarrow \mathbb{R}$.

Tämän alustuksen jälkeen voimme nyt osoittaa kompleksisen version Hahn–Banachin lauseesta.

9.13. Lause (Bohnenblust–Sobczyk–Suhomlinov). *Olkoon E vektoriarvaruus, jonka skalaarikuntana on \mathbb{K} , missä $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Olkoon M avaruuden E vektorialiavaruuks, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarinen funktionaali $M \rightarrow \mathbb{K}$, että $|f(u)| \leq p(u)$, kun $u \in M$. Tällöin on olemassa sellainen lineaarinen funktionaali $g: E \rightarrow \mathbb{K}$, että $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$, ja $|g(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in E$.*

Todistus. Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on sama kuin Lause 9.11. Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ palautetaan reaaliselle versiolle 9.11 seuraavasti.

Nimittäin, edellisen tarkastelun perusteella kompleksisessä tapauksessa

$$(9.14) \quad f(u) = f_1(u) - if_1(iu),$$

kun $u \in M$, missä f_1 on \mathbb{R} -lineaarimuoto $M_r \rightarrow \mathbb{R}$. Koska reaaliosa

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}),$$

niin

$$|f_1(x)| = \frac{1}{2}|f(x) + \overline{f(x)}| \leq \frac{1}{2}(|f(x)| + |\overline{f(x)}|) = |f(x)| \leq p(x)$$

kaikilla $x \in M$.

Hahn–Banachin lauseen 9.11 nojalla on siis olemassa sellainen \mathbb{R} -lineaarinen funktionaali $g_1: E \rightarrow \mathbb{R}$, että $g_1(u) = f_1(u)$, kun $u \in M$, ja $|g_1(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in E_r$. Asetamme:

$$(9.15) \quad g(x) = g_1(x) - ig_1(ix), \quad x \in E.$$

Tällöin g on \mathbb{C} -lineaarinen funktionaali $E \rightarrow \mathbb{C}$ ja jos $u \in M$, niin

$$g(u) = g_1(u) - ig_1(iu) = f_1(u) - if_1(iu) = f(u).$$

On lopuksi osoitettava, että $|g(x)| \leq p(x)$ jokaisella $x \in E$. Olkoon $x \in E$ annettu. Tällöin on olemassa sellainen $\lambda \in \mathbb{C}$, että $|\lambda| = 1$ ja

$$|g(x)| = \lambda g(x).$$

Kuvaus g on \mathbb{C} -lineaarinen, joten $g(\lambda x) = \lambda g(x) = |g(x)| \geq 0$, jolloin kuvauksen g määritelmässä (9.15) imaginaariosa häviää, eli

$$g(\lambda x) = g_1(\lambda x).$$

Koska $|\lambda| = 1$, niin edellisen perusteella siis

$$|g(x)| = |\lambda g(x)| = |g(\lambda x)| = |g_1(\lambda x)| \leq p(\lambda x) = |\lambda|p(x) = p(x).$$

Näin ollen g täyttää vaaditut ehdot. □

Huomautus. Myös Lausetta 9.13 sanotaan usein *Hahn–Banachin* lauseeksi, samoin kuin esimerkiksi seuraavaa lausetta (Lause 9.16), jota voidaan pitää Lauseen 9.13 seurauslauseena.

Sovellamme edellä olleita lauseita erilaisten *jatkuvien* lineaaristen funktionaalien rakentamiseen normiavaruuksissa tai Banachin avaruuksissa. Huomaa, että seuravassa tuloksessa vektorialiavaruus M ei oleteta suljetuksi.

9.16. Lause (Hahn–Banachin lause versio 2). *Olkoon E normiavaruus, M sen vektorialiavaruus ja $u^* \in M^*$ jatkuva lineaarinen funktionaali. Tällöin on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että $\langle u, x^* \rangle = \langle u, u^* \rangle$, kun $u \in M$, ja $\|x^*\| = \|u^*\|$.*

Todistus. Määritellään (semi)normi p avaruudessa E asettamalla

$$p(x) = \|x\| \|u^*\|,$$

kun $x \in E$. Tällöin

$$|\langle u, u^* \rangle| \leq \|u\| \|u^*\| = p(u),$$

kun $u \in M$ ja siis Lauseen 9.13 nojalla on olemassa sellainen lineaarinen kuvaus $x^* \in E^\dagger$, että $\langle u, x^* \rangle = \langle u, u^* \rangle$, kun $u \in M$ ja

$$|\langle x, x^* \rangle| \leq p(x) = \|x\| \|u^*\|$$

kaikilla $x \in E$. Erityisesti, x^* on jatkuva, eli $x^* \in E^*$, ja $\|x^*\| \leq \|u^*\|$. Toisaalta,

$$\begin{aligned} \|u^*\| &= \sup\{ |\langle u, u^* \rangle| : \|u\| \leq 1, u \in M \} \\ &= \sup\{ |\langle u, x^* \rangle| : \|u\| \leq 1, u \in M \} \\ &\leq \sup\{ |\langle x, x^* \rangle| : \|x\| \leq 1, x \in E \} = \|x^*\|, \end{aligned}$$

joten $\|x^*\| = \|u^*\|$. □

Lauseen 9.16 mukaan siis normiavaruuden vektorialiavaruuden jatkuva lineaarimuoto voidaan jatkaa koko avaruuden jatkuvaksi lineaarimuodoksi siten, että sen normi säilyy muuttumattomana (mikä on erityisen hyödyllistä). Lauseen 9.16 avulla voidaan esimerkiksi tuottaa jatkuva funktionaali, joka ”laajentaa” suppenevien jonojen raja-arvon käsitettä kaikille *rajoitetuille* jonoille. Harjoitustehtävien joukossa on lisää esimerkkejä Lauseen 9.16 sovelluksista (vrt. HT 9:10 ja 9:11).

9.17. Esimerkki (Banach rajat). On olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, että $\|x^*\| = 1$ ja

$$x^*(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k, \quad \text{kaikilla } x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in c.$$

Tässä $c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ olemassa}\}$ on suppenevien jonojen avaruus. (Muistutus: $c \subset \ell^\infty$ on suljettu vektorialiavaruus sup-normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen, vrt. Lause 3.19).

Todistus. Asetetaan

$$\ell(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

kun $x = (x_k) \in c$. Raja-arvon perusominaisuuksista seuraa, että $\ell : c \rightarrow \mathbb{R}$ on lineaarinen. Lisäksi Analyysin I:n perusteella (epäyhtälön säilyminen rajalla)

$$|\ell(x)| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right| \leq \sup_k |x_k| = \|x\|_\infty$$

kaikilla $x = (x_k) \in c$, joten ℓ on jatkuva ja $\|\ell\| \leq 1$. Lisäksi, koska $\ell(\mathbf{1}) = 1$, missä $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$, niin $\|\ell\| = 1$.

Hahn-Banachin lauseen (version 9.16) nojalla on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* \in (\ell^\infty)^*$, että $\|x^*\| = \|\ell\| = 1$, ja

$$x^*(x) = \ell(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k, \text{ kun } x = (x_k) \in c.$$

(Tarkemmalla työllä voidaan osoittaa, että lisäksi mm.

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} x_k \leq x^*(x) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} x_k$$

kaikilla $x = (x_k) \in \ell^\infty$.) □

Seuraava tulos jatkaa edelleen Lauseen 9.16 teemoja.

9.18. Lause (Hahn-Banachin lause versio 3). *Olkoon M normiavaruuden E vektorialiavaruus, ja $x_0 \in E$ sellainen vektori, että etäisyys*

$$d = \text{dist}(x_0, M) > 0.$$

Tällöin on olemassa sellainen $x^ \in E^*$, että $x^*(M) = \{0\}$, $\langle x_0, x^* \rangle = d$ ja $\|x^*\| = 1$.*

Todistus. Merkitään $W = M \oplus \text{span}(x_0)$. Jos $z \in W$, niin $z = u + \lambda x_0$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ ovat yksikäsitteisiä. Asetetaan $\langle z, z^* \rangle = \lambda d$. Tällöin z^* on lineaarinen muoto $W \rightarrow \mathbb{K}$, eli $z^* \in W^\dagger$. Jos $u = \bar{0}$ ja $\lambda = 1$, niin saadaan $\langle x_0, z^* \rangle = d$. Jos taas $\lambda = 0$, niin $\langle z, z^* \rangle = 0$ kaikilla $z \in M$, joten $z^*(M) = \{0\}$.

Väitämme, että z^* on jatkuva funktionaali W :ssä, eli $z^* \in W^*$. Olkoon tätä varten $z = u + \lambda x_0 \in W$ mielivaltainen. Voidaan olettaa, että $\lambda \neq 0$. Tällöin

$$|\langle z, z^* \rangle| = |\lambda|d \leq |\lambda| \left\| \frac{u}{\lambda} + x_0 \right\| = \|u + \lambda x_0\| = \|z\|,$$

missä $d \leq \|\lambda^{-1}u + x_0\|$ koska vektori $-\lambda^{-1}u \in M$. Päättellemme, että $z^* \in W^*$ ja $\|z^*\| \leq 1$.

Tarkistetaan seuraavaksi, että itse asiassa $\|z^*\| = 1$. Tätä varten olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Koska $d = \inf\{\|x_0 - u\| : u \in M\}$, niin löytyy sellainen $u \in M$, että $\|x_0 - u\| < d + \varepsilon$. Määritelmän mukaan

$$|\langle x_0 - u, z^* \rangle| = |\langle x_0, z^* \rangle| = d,$$

joten normitetulle vektorille $\frac{x_0 - u}{\|x_0 - u\|} \in W$ pätee

$$\begin{aligned} \|z^*\| &= \sup\{|\langle u, z^* \rangle| : u \in W, \|u\| \leq 1\} \geq \frac{|\langle x_0 - u, z^* \rangle|}{\|x_0 - u\|} \\ &= \frac{d}{\|x_0 - u\|} > \frac{d}{d + \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{d + \varepsilon}. \end{aligned}$$

Tästä päättellemme, että $\|z^*\| \geq 1$.

Voimme soveltaa Lausetta 9.16, joka takaa sellainen jatkuvan lineaarifunktionaalinen $x^* \in E^*$ olemassaolon, jolle $\langle x, x^* \rangle = \langle x, z^* \rangle$, kun $x \in W$, ja $\|x^*\| = \|z^*\|$. Tällöin siis $x^*(M) = \{0\}$, $\langle x_0, x^* \rangle = \langle x_0, z^* \rangle = d$ ja $\|x^*\| = 1$. \square

9.19. Seuraus. Jos E on normiavaruus ja $\bar{0} \neq x_0 \in E$ on vektori, niin on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* \in E^*$, että $\langle x_0, x^* \rangle = \|x_0\|$ ja $\|x^*\| = 1$. Erityisesti, jos $x, y \in E$ ja $x \neq y$, niin on olemassa $x^* \in E^*$, jolle $\langle x, x^* \rangle \neq \langle y, x^* \rangle$.

Todistus. Jos $M = \{\bar{0}\}$, niin $\text{dist}(x_0, M) = \|x_0\|$. Ensimmäinen väite seuraa siten välittömästi Lauseesta 9.18.

Jos $x \neq y$, niin erityisesti on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että

$$\langle x, x^* \rangle - \langle y, x^* \rangle = \langle x - y, x^* \rangle = \|x - y\| > 0.$$

\square

Seuraava ”duaalikaava” normin laskemiseksi on usein hyödyllinen.

9.20. Seuraus. Jos E on normiavaruus ja $x \in E$, niin

$$(9.21) \quad \|x\| = \max\{|\langle x, x^* \rangle| : x^* \in E^*, \|x^*\| \leq 1\}.$$

Erityisesti, jos $x \in E$ on sellainen vektori, että $\langle x, x^* \rangle = 0$ kaikilla $x^* \in E^*$, niin $x = \bar{0}$.

Todistus. Jos $\|x^*\| \leq 1$, niin $|\langle x, x^* \rangle| \leq \|x\| \|x^*\| \leq \|x\|$, joten

$$\sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle| \leq \|x\|.$$

Voidaan olettaa, että $x \neq \bar{0}$, koska kaava (9.21) on ilmeinen kun $x = \bar{0}$. Tällöin Seurauksen 9.19 nojalla on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että

$$|\langle x, x^* \rangle| = \|x\| \quad \text{ja} \quad \|x^*\| = 1,$$

joten $\|x\| \leq \max |\langle x, x^* \rangle|$.

Jos $\langle x, x^* \rangle = 0$ kaikilla $x^* \in E^*$, niin normikaavasta (9.21) seuraa, että $\|x\| = 0$, eli siis $x = \bar{0}$. \square

Huomautus. Harjoitustehtävässä 9:2 on annettu esimerkki funktionaalista $x^* \in E^*$, jolle supremumia ei saavuteta funktionaalin x^* normin määritelmässä

$$\|x^*\| = \sup\{|\langle x, x^* \rangle| : x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Toisin sanoen, tälle funktionaalille $x^* \in E^*$ suurin arvo

$$\max\{|\langle x, x^* \rangle| : \|x\| \leq 1\}$$

ei ole olemassa.

9.22. Seuraus. *Olkoon M normiavaruuden E vektoriavaruus. Tällöin M on tiheä avaruudessa E , eli $\overline{M} = E$, silloin ja vain silloin kun avaruudella M on seuraava ominaisuus: Jos $x^* \in E^*$ ja $x^*(M) = \{0\}$, niin $x^* = \bar{0}$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $\overline{M} = E$. Jos tällöin $x^*(M) = \{0\}$, niin $M \subset \text{Ker}(x^*)$, missä $\text{Ker}(x^*) = (x^*)^{-1}(\{0\})$ on suljettu avaruudessa E , joten siis $E = \overline{M} \subset \text{Ker}(x^*)$. Tällöin $E = \text{Ker}(x^*)$, eli $x^* = \bar{0}$.

Oletetaan kääntäen, että $\overline{M} \neq E$. Tällöin löytyy sellainen vektori $x_0 \in E$, että $\text{dist}(x_0, M) = \text{dist}(x_0, \overline{M}) > 0$. Lauseen 9.18 nojalla on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että $x^*(M) = \{0\}$ ja $\|x^*\| = 1$ (jolloin toki $x^* \neq \bar{0}$). Siis avaruudella M ei ole väitteen ominaisuutta. (Erityisesti, jos avaruudella M on väitteen ominaisuus, niin välttämättä $\overline{M} = E$.) \square

Lisätietoja. Olkoon E \mathbb{K} -kertoiminen vektoriavaruus, $\emptyset \neq K \subset E$ suljettu ja konvekksi osajoukko, sekä $x_0 \in E$ vektori, jolle $x_0 \notin K$. Tällöin on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* \in E^*$, että

$$\text{Re}\langle x_0, x^* \rangle > \sup_{x \in K} \text{Re}\langle x, x^* \rangle$$

Tämä *geometrinen* Hahn-Banachin *separaatiolause* on vahvempi versio Lauseesta 9.13, ja se on varsin hyödyllinen monissa yhteyksissä. Todistus kuitenkin sivuutetaan tällä kurssilla. (kts. esim. Werner: *Funktionalanalysis*, luku III.2).

BILINEAARIMUODOT JA LAX–MILGRAMIN LAUSE

Huom.: Bilinearisuus ja Lax-Milgram ei luennoitu 2010

Fréchet–Rieszin lauseen sovelluksena todistamme Lax–Milgramin lauseen, jota voi soveltaa differentiaaliyhtälöihin. Lause koskee Hilbertin avaruuksien jatkuvia bilineaarimuotoja.

9.23. Määritelmä. Olkoon E, F ja G vektoriavaruuksia. Sanomme, että kuvaus $B: E \times F \rightarrow G$ on bilineaarinen, jos $x \mapsto B(x, y)$ on lineaarinen jokaisella $y \in F$ ja $y \mapsto B(x, y)$ on lineaarinen jokaisella $x \in E$.

Myös bilineaarikuvauksille jatkuvuus on sama kuin rajoittuneisuus (vrt. 2.30).

9.24. Lause. *Olkoon E, F ja G normiavaruuksia. Tällöin bilineaarinen kuvaus $B: E \times F \rightarrow G$ on jatkuva jos ja vain jos on olemassa sellainen $M < \infty$, että*

$$\|B(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\| \text{ kaikilla } (x, y) \in E \times F.$$

Sanomme edellä, että bilineaarikuvaus B on *rajoitettu*. Laskujen helpottamiseksi varustetaan tuloavaruus $E \times F$ normilla

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|), \quad \text{kun } (x, y) \in E \times F.$$

(Helposti nähdään, että $\| (x, y) \|$ on ekvivalentti aikaisemmin käytetyn normin $\| (x, y) \|_1 = \| x \| + \| y \|$ kanssa.)

Todistus. (Jatkossa tarvitaan Lauseesta 9.24 ainoastaan implikaatio "⇒", joten jätetään käänteinen suunta vapaaksi HT:ksi). Jos B on jatkuva $E \times F \rightarrow G$, niin erityisesti B on jatkuva origossa $(\bar{0}, \bar{0})$. Tällöin on olemassa sellainen $r > 0$, että $\| B(x, y) \| < 1$ aina kun $\| (x, y) \| = \max(\| x \|, \| y \|) \leq r$.

Olkoon nyt $(x, y) \in E \times F$ mielivaltainen pistepari. Voidaan olettaa, että $x \neq \bar{0}$ ja $y \neq \bar{0}$ (nimittäin, selvästi $B(x, y) = \bar{0}$ jos $x = \bar{0}$ tai $y = \bar{0}$). Tällöin $\| (r \frac{x}{\|x\|}, r \frac{y}{\|y\|}) \| = r$, joten kuvauksen B bilineaarisuudesta seuraa, että

$$1 > \| B(r \frac{x}{\|x\|}, r \frac{y}{\|y\|}) \| = \frac{r^2}{\|x\| \|y\|} \| B(x, y) \|.$$

Siis $\| B(x, y) \| \leq r^{-2} \| x \| \| y \|$ kaikilla $(x, y) \in E \times F$. □

Fréchet–Rieszin lauseen avulla voimme nyt karakterisoida Hilbertin avaruuksien jatkuvat bilineaarimuodot, eli jatkuvat bilineaarikuvaukset joiden maaliavaruutena on \mathbb{K} .

9.25. Seuraus. *Olkoon E \mathbb{R} -kertoiminen Hilbertin avaruus ja $B: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ bilineaarinen ja jatkuva. Silloin on olemassa yksikäsitteinen $T \in \mathcal{L}(E)$, jolle*

$$B(x, y) = (x | Ty) \quad \text{jokaisella } x, y \in E.$$

Todistus. Jos $y \in E$, niin kuvaus $B_y: x \mapsto B(x, y)$ on jatkuva ja lineaarinen, eli $B_y \in E^*$. Fréchet–Rieszin lauseen 9.7 nojalla on olemassa sellainen *yksikäsitteinen* alkio $T(y) \in E$, että

$$B_y(x) = B(x, y) = (x | T(y)) \quad \text{jokaisella } x \in E.$$

Yksikäsitteisyyden nojalla kuvaus $T: y \mapsto T(y)$ on lineaarinen (tarkista!). Se on myös jatkuva: koska B on jatkuva, niin Lauseen 9.24 perustella on olemassa $M < \infty$, jolle

$$\| Ty \|^2 = (Ty | Ty) = B(y, Ty) \leq M \| y \| \| Ty \|, \quad \text{kun } y \in E.$$

Tästä $\| Ty \| \leq M \| y \|$ jokaisella $y \in E$. □

9.26. Määritelmä. Jos E on reaalinen Hilbertin avaruus, niin sanomme, että bilineaarimuoto $B: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ on *koersiivinen*, jos löytyy sellainen $C > 0$, että $B(x, x) \geq C \| x \|^2$ jokaisella $x \in E$.

9.27. Lause (Lax–Milgram). *Olkoon B jatkuva, koersiivinen bilineaarimuoto Hilbertin avaruudessa E . Jos $w \in E^*$, niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen $u \in E$, että*

$$(9.28) \quad B(x, u) = \langle x, w \rangle \quad \text{jokaisella } x \in E.$$

Todistus. Olkoon $w \in E^*$. Fréchet–Rieszin lauseen 9.7 nojalla on olemassa sellainen yksikäsitteinen $v \in E$, jolle $\langle x, w \rangle = (x|v)$ jokaisella $x \in E$. Seurauslauseen 9.25 mukaan löydämme operaattorin $T \in \mathcal{L}(E)$, jolle $B(x, y) = (x|Ty)$ jokaisella $x, y \in E$.

Väite. T on bijektio.

Nimittäin, jos $x \in E$, niin koersiivisuuden ja Cauchy-Schwarzin nojalla

$$C\|x\|^2 \leq B(x, x) = (x|Tx) \leq \|x\| \cdot \|Tx\|,$$

joten $\|Tx\| \geq C\|x\|$, missä vakio $C > 0$. Näin T on alhaalta rajoitettu, joten T on injektio ja kuva $Im(T) \subset E$ on suljettu (vrt. HT 4:3). Lisäksi, jos $x \in (Im(T))^\perp$, niin oletuksen perusteella

$$0 = (x|Tx) = B(x, x) \geq C\|x\|^2,$$

joten $x = \bar{0}$. Näin $Im(T) = E$, eli T on surjektio. Valitaan nyt $u = T^{-1}v$, jolloin $B(x, u) = (x|v) = \langle x, w \rangle$ kaikilla $x \in E$, joten ehto (9.28) on voimassa.

Jos myös $u_1 \in E$ toteuttaa ehdon (9.28), niin alkion v yksikäsitteisyyden nojalla

$$(x|Tu_1) = B(x, u_1) = \langle x, w \rangle = (x|v) = (x|Tu)$$

jokaisella $x \in E$. Tällöin $Tu = Tu_1$, ja koska T on bijektio, niin $u = u_1$. \square

9.29. *Huomautus.* (1) Fréchet–Rieszin esityslause on Lax–Milgramin lauseen ”erikoistapaus”, missä bilineaarinen muoto $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ on $B(x, y) = (x|y)$, kun $(x, y) \in E \times E$, eli avaruuden E sisätulo.

(2) Lax–Milgramin lauseella on myös kompleksinen versio. Jos Hilbertin avaruuden E skalaarikunta on \mathbb{C} , niin oletetaan, että $B : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva, $x \mapsto B(x, y)$ on lineaarinen kaikilla $y \in E$, $y \mapsto B(x, y)$ on *liittolineaarinen* kaikilla $x \in E$, sekä sen reaaliosta toteuttaa

$$\operatorname{Re} B(x, x) \geq C\|x\|^2, \quad \text{kaikilla } x \in E$$

jollakin vakiolla $C > 0$. Todistus kompleksisessä tapauksessa on samanlainen kuin Lauseen 9.27 todistus.

Sovellamme Lax–Milgramin lausetta seuraavan epähomogeeniseen Sturm–Liouvilin ongelmaan (vertaa luvun 5 homogeenisen Sturm–Liouvilin ongelman käsittelyä, missä $f = \bar{0}$, sekä lisäksi $q(x) \geq \delta > 0$ kaikilla $x \in [0, 1]$)

$$(SL') \quad \begin{cases} -(pu')' + qu = f, & \text{kun } x \in (0, 1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases}$$

missä $p \in C^1(0, 1)$, $q \in C(0, 1)$, $f \in L^2(0, 1)$ ovat annettuja ja $p(x) \geq \delta > 0$ ja $q(x) \geq 0$. Muistutamme, että $H_0^1(0, 1) = \{ f \in H^1(0, 1) : f(0) = f(1) = 0 \}$.

0 } on Sobolevin avaruuden $H^1(0, 1)$ suljettu vektorialiavaruus. Tarvitsemme seuraavan aputuloksen

9.30. **Lemma** (Poincarén epäyhtälö). *On olemassa vakio $C > 0$, jolle*

$$\|f\|_{H^1(0,1)} \leq C \|f'\|_{L^2(0,1)}$$

kaikilla $f \in H_0^1(0, 1)$.

Todistus. Jos $f \in H_0^1(0, 1)$, niin Lauseen 5.20 sivulla 105 nojalla melkein kaikilla $x \in [0, 1]$ on voimassa

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \|f'\|_{L^1(0,1)},$$

mistä seuraa, että $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_1$. Hölderin epäyhtälön nojalla siis

$$\|f\|_2^2 \leq \|f\|_\infty \|f\|_1 \leq \|f'\|_1 \|f\|_2 \leq \|f'\|_2 \|f\|_2,$$

joten $\|f\|_2 \leq \|f'\|_2$. Väite seuraa nyt avaruuden $H^1(0, 1)$ normin määritelmästä. \square

9.31. **Lause.** *Tehtävällä (SL') on yksikäsitteinen heikko ratkaisu $u \in H_0^1(0, 1)$. Jos $f \in C(0, 1)$, on $u \in C^2(0, 1)$ ja se on tehtävän (SL') klassinen ratkaisu.*

Heikko ratkaisu tarkoittaa tässä funktiota $u \in H_0^1(0, 1)$, jolle

$$(9.32) \quad \int_0^1 [p(x)u'(x)\varphi'(x) + q(x)u(x)\varphi(x)] dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x) dx$$

jokaisella $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$.

Todistus. (1) Kuten luvussa 5 näemme, että jokainen tehtävän (SL') klassinen ratkaisu on myös heikko ratkaisu.

(2) Määritellään Hilbertin avaruudessa $E := (H_0^1(0, 1), \|\cdot\|_{H^1(0,1)})$ bilineaarimuoto

$$B(u, v) = \int_0^1 [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx.$$

Koska $p, q \in C(0, 1)$, niin $\|p\|_\infty \leq M$ ja $\|q\|_\infty \leq M$ jollakin $M < \infty$. Siispä Hölderin epäyhtälön avulla saamme

$$|B(u, v)| \leq M \int_0^1 [|u'(x)v'(x)| + |u(x)v(x)|] dx \leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1},$$

joten B on jatkuva. Poincarén epäyhtälön seurauksena B on myös koersiivinen, sillä

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1}^2 &\leq C \|u'\|_{L^2}^2 = C \int_0^1 u'(x)^2 dx \leq C\delta^{-1} \int_0^1 p(x)u'(x)^2 dx \\ &\leq C\delta^{-1} \int_0^1 [p(x)u'(x)^2 + q(x)u(x)^2] dx = C\delta^{-1} B(u, u). \end{aligned}$$

Edellä käytimme hyväksi oletusta $p(x) \geq \delta$ ja $q(x) \geq 0$.

(3) Löydämme tehtävän (SL') heikon ratkaisun nyt seuraavasti: Koska $f \in L^2(0, 1)$ on lineaarikuvaus

$$w(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)f(x) dx$$

jatkuva $E \rightarrow \mathbb{R}$, joten $w \in E^*$. Lax–Milgramin lauseen nojalla (koska B toteuttaa Lax–Milgramin lauseen ehdot kohdan (2) perusteella) löydämme yksikäsitteisen funktion $u \in E$, jolle

$$B(\varphi, u) = \int_0^1 [p(x)\varphi'(x)u'(x) + q(x)\varphi(x)v(x)] dx = w(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)f(x) dx$$

jokaisella $\varphi \in E$. Määritelmän (9.32) nojalla tämä on tehtävän (SL') yksikäsitteinen heikko ratkaisu (sillä $\mathcal{D}(0, 1) \subset E$).

(4) Voidaan osoittaa, kuten luvussa 5, että $u \in C^2(0, 1)$ jos $f \in C(0, 1)$. \square

Huomautamme vielä, että yleisempi tehtävä

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f, & \text{kun } x \in (0, 1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases}$$

missä p, q ja f ovat kuten edellä ja $r \in C(0, 1)$, palautuu tehtävään (SL') kertomalla ylempi yhtälö funktiolla

$$\zeta(x) = \exp\left(-\int^x \frac{r(t)}{p(t)} dt\right)$$

ja käyttämällä identiteettiä $\zeta'p + \zeta r = 0$. (Katso Brezis, VIII. 4, mistä löytyy myös muita Lax–Milgramin lauseen sovelluksia).

BIDUAALI

Huom.: Biduaalista luennoitiin 2010

9.33. **Määritelmä.** Jos E on normiavaruus, niin $E^{**} := (E^*)^*$ on avaruuden E biduaali.

Tiedämme, että normiavaruuden E biduaali on aina Banachin avaruus. Olkoon $x \in E$ kiinteä vektori ja tarkastellaan sen määräämää kuvausta $J_x: E^* \rightarrow \mathbb{K}$, missä

$$J_x(x^*) = \langle x, x^* \rangle, \quad x^* \in E^*.$$

Havaitsemme, että $J_x \in (E^*)^*$: kuvaus J_x on lineaarinen, sillä (summakuvauksen määritelmästä)

$$J_x(\alpha x^* + \beta y^*) = \langle x, \alpha x^* + \beta y^* \rangle = \alpha \langle x, x^* \rangle + \beta \langle x, y^* \rangle = \alpha J_x(x^*) + \beta J_x(y^*),$$

kun $x^*, y^* \in E^*$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Edelleen

$$|J_x(x^*)| = |\langle x, x^* \rangle| \leq \|x\| \|x^*\|, \quad x^* \in E^*,$$

joten J_x on myös jatkuva $E^* \rightarrow \mathbb{K}$.

Siispä $J_x \in E^{**}$ jokaisella $x \in E$, missä J_x riippuu vektorista $x \in E$. Merkitsemme näin muodostunutta kuvausta $J: E \rightarrow E^{**}$, eli $Jx = J_x$ kun $x \in E$. (Tarvittaessa käytetään merkintä J_E selvyuden vuoksi.) Kuvauksen J määrittelee siis ehto

$$\langle x^*, Jx \rangle = \langle x, x^* \rangle, \quad x \in E, \quad x^* \in E^*.$$

(Määritelmä perustuu seikkaan, että duaalisuusehto $(x, x^*) \mapsto \langle x, x^* \rangle$ on lineaarinen $E \times E^* \rightarrow \mathbb{K}$ sekä vektorin x että funktionaalin x^* suhteen.) Sanomme, että J on *kanoninen kuvaus* $E \rightarrow E^{**}$.

9.34. Lause. *Jos E on normiavaruus, niin kanoninen kuvaus $J: E \rightarrow E^{**}$ on lineaarinen isometria.*

Todistus. Olkoon $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ja $x^* \in E^*$. Tällöin funktionaalin x^* lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \langle x^*, J(\alpha x + \beta y) \rangle &= \langle \alpha x + \beta y, x^* \rangle = \alpha \langle x, x^* \rangle + \beta \langle y, x^* \rangle \\ &= \alpha \langle x^*, Jx \rangle + \beta \langle x^*, Jy \rangle, \end{aligned}$$

joten $J(\alpha x + \beta y) = \alpha Jx + \beta Jy$. Lisäksi normin duaalikaavan (Seuraus 9.20) nojalla

$$\|Jx\| = \sup_{x^* \in B_{E^*}} |\langle x^*, Jx \rangle| = \sup_{x^* \in B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle| = \|x\|$$

kaikilla $x \in E$, joten J on isometria. (Edellä $B_{E^*} = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$ on duaalin E^* suljettu yksikköpallo.) \square

Koska E^{**} on Banachin avaruus, niin lauseen 9.34 mukaan $J(E) \subset E^{**}$ on vektorialiavaruus, joka on isometrisesti isomorfinen avaruuden E kanssa. Nyt jos E on Banachin avaruus, niin $J(E)$ on suljettu. Jos E ei ole täydellinen, ei myöskään $J(E)$ ole suljettu.

Huomautus. Vektorialiavaruuden $J(E)$ sulkeuma avaruudessa E^{**} on olemassa, joten sanomme, että Banachin avaruus $\overline{J(E)}$ on avaruuden E *täydentymä* ja merkitsemme $\widehat{E} := \overline{J(E)}$. Jokaiselle normiavaruudelle E siis löytyy Banachin avaruus $F = \widehat{E}$ ja sellainen lineaarinen isometria $T: E \rightarrow F$, että vektorialiavaruus $T(E) \subset F$ on tiheä. (Voidaan kääntäen osoittaa, että jokainen tällainen Banachin avaruus F on itse asiassa lineaarisesti isometrinen täydentymän \widehat{E} kanssa.)

Voidaan kysyä, onko edellä aina $J(E) = E^{**}$? Tämä johtaa seuraavaan käsitteeseen.

9.35. Määritelmä. Normiavaruus E on *refleksiivinen*, jos $J(E) = E^{**}$.

Jos E on refleksiivinen, niin E ja E^* ovat siis toisiinsa nähden symmetrisessä asemassa. Koska E^{**} on aina Banachin avaruus, niin välttämätön ehto refleksiivisyydelle on, että E on Banachin avaruus.

9.36. Esimerkki. (1) Jokainen äärellisulotteinen normiavaruus on refleksiivinen: tässä tapauksessa on nimittäin $E^* = E^\dagger$ (vrt. HT 9:5) ja siten $\dim(E) = \dim(E^*) = \dim(E^{**})$. Tällöin J on bijektio lineaarialgebran perusteella.

(2) Jos $1 < p < \infty$, niin ℓ^p on refleksiivinen: Esimerkin 9.3 nojalla $(\ell^p)^* = \ell^q$, missä q on p :n duaaliekspONENTTI (eli $1/p + 1/q = 1$), ja

$$\langle x, y^* \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k y_k,$$

kun $x = (x_k) \in \ell^p$, $y^* = (y_l) \in \ell^q$. Siis $J : \ell^p \rightarrow (\ell^p)^{**} = \ell^p$ on identtinen kuvaus.

(3) Olkoon E Hilbertin avaruus, $x \in E$ ja $z \in E$. Jos merkitsemme $f_x(z) = (z | x)$, niin Fréchet–Rieszin lauseen mukaan kuvaus $\rho : x \mapsto f_x$ on liittolineaarinen isometrinen bijektio $E \rightarrow E^*$. Tällöin E^* on Hilbertin avaruus sisätulon

$$(\rho(x) | \rho(y)) = (y | x), \quad x, y \in E$$

suhteen. Olkoon $\tau : E^* \rightarrow E^{**}$ Fréchet–Rieszin lauseen antama liittolineaarinen isometrinen bijektio. Tällöin kanoninen kuvaus $J = \tau \circ \rho$, joten J on bijektio (tarkemmat yksityiskohdat HT 9:19). Siis jokainen Hilbertin avaruus on refleksiivinen. (Separoituvan Hilbertin avaruuden tapauksessa tämä tulos sisältyy jo esimerkkiin (2) yhdistettynä Lauseen 4.41 sivulla 81 jälkeiseen kommenttiin.)

(4) [Lisätietoja] Vastaavasti, jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, niin voidaan osoittaa, että $L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega)$. Dualiteetilla on luonnollinen esitys

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(t)g(t)d\mu$$

missä $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Tästä voidaan päätellä kuten kohdassa (2), että $L^p(\Omega)$ on refleksiivinen jos $1 < p < \infty$.

(5) [Lisätietoja] Refleksiivisyyden määritelmässä kanonisen upotuksen $J : E \rightarrow E^{**}$ rooli on keskeinen: James (1951) löysi ei-refleksiivisen Banachin avaruuden E , jolle on kuitenkin olemassa lineaarinen isomorfismi $U : E \rightarrow E^{**}$.

TRANSPOOSI

Huom.: Transpoosista ei luennoitu 2010

Olkoot E ja F normiavaruuksia, joilla on skalaarikuntana \mathbb{K} . Olkoon $T \in \mathcal{L}(E, F)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Jos funktionaali $y^* \in F^*$, niin yhdistetty kuvaus $y^* \circ T : E \rightarrow \mathbb{K}$ on jatkuva lineaarinen funktionaali, eli $y^* \circ T \in E^*$. Merkitään

$$T^*(y^*) := y^* \circ T, \quad y^* \in F^*.$$

Tällöin siis

$$(T^*(y^*))(x) = (y^* \circ T)(x) = y^*(Tx), \text{ eli } \langle x, T^*(y^*) \rangle = \langle Tx, y^* \rangle,$$

kun $x \in E$ ja $y^* \in F^*$. Kuvausdiagrammina tämä näyttää seuraavalta (vrt. Vektoriavaruuksien luku 12, §76).

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ & \searrow & \swarrow \\ & T^*y^* & y^* \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

Pitäen funktionaalia $y^* \in F^*$ muuttujana toteamme, että ehto $y^* \mapsto T^*(y^*)$ määrittelee kuvauksen $T^* : F^* \rightarrow E^*$.

9.37. Määritelmä. Edellä konstruoitua kuvausta $T^* : F^* \rightarrow E^*$ sanotaan operaattorin T (topologiseksi) *transpoosiksi* (tai *adjungaatiksi*).

9.38. Lause. *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Tällöin transpoosi $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ on jatkuva lineaarinen operaattori ja $\|T^*\| = \|T\|$.*

Todistus. T^* on lineaarinen: Olkoot $y^*, z^* \in F^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ sekä $x \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\alpha y^* + \beta z^*) \rangle &= \langle Tx, \alpha y^* + \beta z^* \rangle = \alpha \langle Tx, y^* \rangle + \beta \langle Tx, z^* \rangle \\ &= \alpha \langle x, T^*y^* \rangle + \beta \langle x, T^*z^* \rangle = \langle x, \alpha T^*y^* + \beta T^*z^* \rangle. \end{aligned}$$

Siis $T^*(\alpha y^* + \beta z^*) = \alpha T^*y^* + \beta T^*z^*$ kuvauksina $E \rightarrow \mathbb{K}$.

T^* on jatkuva: Olkoot $y^* \in F^*$ ja $x \in E$. Tällöin

$$|\langle x, T^*y^* \rangle| = |\langle Tx, y^* \rangle| \leq \|y^*\| \|Tx\| \leq \|T\| \|y^*\| \|x\|,$$

joten

$$\|T^*y^*\| = \sup_{x \in B_E} |\langle x, T^*y^* \rangle| \leq \|T\| \|y^*\|, \quad y^* \in F^*.$$

Erityisesti T^* on jatkuva lineaarioperaattori $F^* \rightarrow E^*$, ja Lauseen 8.2 sivulla 144 sekä Lemman 8.9 sivulla 147 nojalla

$$\|T^*\| = \sup_{y^* \in B_{F^*}} \|T^*y^*\| \leq \|T\|.$$

Toisaalta, normin duaalikaavan (Seuraus 9.20) mukaan

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \sup_{y^* \in B_{F^*}} |\langle Tx, y^* \rangle| = \sup_{y^* \in B_{F^*}} |\langle x, T^*y^* \rangle| \leq \sup_{y^* \in B_{F^*}} \|T^*y^*\| \cdot \|x\| \\ &= \|T^*\| \cdot \|x\| \end{aligned}$$

kun $x \in E$. Siis $\|T\| \leq \|T^*\|$, jolloin $\|T^*\| = \|T\|$. □

9.39. Esimerkki. Olkoon $T : \ell^1 \rightarrow c_0$ kuvaus

$$Tx = \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j, \sum_{j=2}^{\infty} x_j, \dots \right),$$

kun $x = (x_j) \in \ell^1$. Selvästi T on lineaarinen ja

$$\|Tx\|_{\infty} = \sup_n \left| \sum_{j=n}^{\infty} x_j \right| \leq \sup_n \sum_{j=n}^{\infty} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|x\|_1,$$

joten $T \in \mathcal{L}(\ell^1, c_0)$. Määritetään $T^* : c_0^* \rightarrow (\ell^1)^*$. Koska $c_0^* = \ell^1$ ja $(\ell^1)^* = \ell^{\infty}$ (vrt. HT 12:4), niin $T^* : \ell^1 \rightarrow \ell^{\infty}$. Lisäksi, kun $z^* = (z_n) \in \ell^{\infty}$, niin $z_k = \langle e_k, z^* \rangle$, kun $k = 1, 2, \dots$ ja $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^1$ (1 k :nnella paikalla).

Olkoon $x^* = (y_k) \in \ell^1$ mielivaltainen. Tällöin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on

$$\langle e_k, T^*x^* \rangle = \langle Te_k, x^* \rangle = \sum_{j=1}^k y_j,$$

sillä $Te_k = (1, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots)$ (k ykköstä alussa). Siis

$$T^*x^* = \left(\sum_{j=1}^n y_j \right)_{n \in \mathbb{N}} = (y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3, \dots)$$

kun $x^* = (y_k) \in \ell^1$.

Hilbertin avaruuksien tapauksessa on myös olemassa seuraava hyödyllinen variaatio transpoosin käsitteestä. Olkoon E Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(E)$. Kun $y \in E$, niin kuvaus $x \mapsto (Tx | y)$ määrittelee duaalin E^* alkion. Fréchet–Rieszin lauseen nojalla on siis olemassa yksikäsitteinen $z \in E$, jolle $(Tx | y) = (x | z)$ kaikilla $x \in E$. Määrittelemmekin kuvauksen $T^\dagger : E \rightarrow E$, jota nimittämme samoin myös operaattorin T *adjungaattiksi*, asettamalla $T^\dagger(y) = z$. Siis T^\dagger toteuttaa ehdon

$$(x | T^\dagger y) = (Tx | y), \quad x, y \in E.$$

Tällöin T^\dagger on jatkuva lineaarinen operaattori $E \rightarrow E$ ja $\|T^\dagger\| = \|T\|$ (vrt. Lause 10.2).

9.40. *Huomautus.* Huomaa erona, että jos $T \in \mathcal{L}(E)$, niin aikaisemmin funktionaalien avulla määritelty transpoosi T^* on kuvaus $E^* \rightarrow E^*$. Fréchet-Rieszin lauseen välityksellä T^\dagger ja T^* kuitenkin liittyvät läheisesti toisiinsa (ja usein käytetään jopa samaa merkintää T^* molemmille käsitteille).

Harjoitustehtäviä

9:1 Olkoon $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ välin $[0, 1]$ kaikki rationaalipisteet. Asetetaan

$$x^*(f) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{-k} f(q_k), \quad \text{kun } f \in C(0, 1),$$

Näytä, että $x^* \in C(0, 1)^*$ ja laske normi $\|x^*\|$.

9:2 Asetetaan

$$\phi(f) = \int_0^{1/2} f(t) dt - \int_{1/2}^1 f(t) dt, \quad f \in C(0, 1).$$

(i) Näytä, että $\phi \in C(0, 1)^*$ ja laske normi $\|\phi\|$.

(ii) Onko olemassa sellainen funktio $f \in C(0, 1)$, että $\|f\|_\infty = 1$ ja $|\phi(f)| = \|\phi\|$?

9:3 Näytä, että duaaliavaruus $c_0^* = \ell^1$. [*Vihje:* Vrt. Esimerkki 9.3 ja HT 10:4.]

9:4 Olkoon E äärellisulotteinen normiavaruus. Näytä, että jokainen lineaarinen funktionaali $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ on jatkuva, toisin sanoen, $E^* = E^\dagger$. [*Vihje:* suljettu yksikköpallo B_E on kompakti.]

9:5 Olkoon E ääretönulotteinen \mathbf{K} -kertoiminen Banachin avaruus. Konstruoi epäjatkuva lineaarinen kuvaus $f : E \rightarrow \mathbf{K}$ [*Ohje:* saat käyttää lineaarialgebran tietoa, että vektoriavaruudella E on algebrallinen kanta $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, toisin sanoen, $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ on maksimaalinen lineaarisesti vapaa joukko ja jokaisella vektorilla $x \in E$ on yksikäsitteinen äärellinen esitys $x = \sum_\alpha c_\alpha x_\alpha$. Voi olettaa että $\|x_\alpha\| = 1$ kaikilla α . Määrittele lineaarikuvaus $f : E \rightarrow \mathbf{K}$ kiinnittämällä arvot $f(x_\alpha)$ sopivasti kaikilla $\alpha \in \Lambda$.]

9:6 Tarkista, että $\phi \in H^1(0, 1)^*$ kun asetetaan $\phi(f) = f(1)$, $f \in H^1(0, 1)$. Etsi (se yksikäsitteinen) alkio $g \in H^1(0, 1)$, jolle

$$\phi(f) = (f|g), \quad \text{kaikilla } f \in H^1(0, 1).$$

Tässä $(\cdot|\cdot)$ on avaruuden $H^1(0, 1)$ tavallinen sisätulo. [*Ohje:* oleta ensin että f ja g ovat sileitä funktioita ja etsi osittaisintegroimalla g :lle differentiaaliyhtälö. Totea, että DY:n ratkaisu on haettu funktio.]

9:7 Olkoon E kompleksinen normiavaruus ja E_r vastaava reaalikertoiminen normiavaruus (luonnollisella tavalla tulkittuna). Asetetaan $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$, kun $f_1 \in (E_r)^*$ ja $x \in E$. Osoita, että f on \mathbf{C} -lineaarinen funktionaali $E \rightarrow \mathbf{C}$ ja $\|f\| = \|f_1\|$.

9:8 Olkoon E Banachin avaruus ja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ jono. Sanotaan, että (x_n) suppenee *heikosti* avaruudessa E kohti vektoria $x \in E$ kun $n \rightarrow \infty$, jos $x^*(x) = \lim_n x^*(x_n)$ kaikilla $x^* \in E^*$. Merkintä: $x_n \xrightarrow{w} x$ kun $n \rightarrow \infty$.

Tutki, suppeneeko jono (e_n) heikosti avaruuksissa ℓ^p , $1 \leq p < \infty$ ja c_0 , kun $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ ja $n \in \mathbb{N}$ (ykköinen n :ssa paikassa). [Vihje: muista, että $(\ell^p)^* = \ell^q$ kun $1 < p < \infty$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sekä $c_0^* = \ell^1$. Totea lisäksi, että ehto $x = (x_k) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$ määrittelee duaalin $(\ell^1)^*$ alkion.]

9:9 Olkoon E Banachin avaruus ja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ jono. Sarja $\sum_n x_n$ on *heikosti ehdottomasti Cauchy* avaruudessa E jos $\sum_n |x^*(x_n)| < \infty$ kaikilla $x^* \in E^*$. Näytä, että tällöin on olemassa sellainen vakio $C < \infty$, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| \leq C \|x^*\| \quad \text{kaikilla } x^* \in E^*.$$

[Ohje: Tarkista että lineaarikuvauksella $T : E^* \rightarrow \ell^1$, $Tx^* = (x^*(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, on suljettu kuvaaja.]

9:10 Näytä, että on olemassa jatkuva lineaarinen funktionaali $\phi : L^\infty(0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ jolle $\phi(f) = f(\frac{1}{2})$ kaikilla jatkuvilla funktioilla $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$. [Vinkki: $C(0, 1) \subset L^\infty(0, 1)$ on suljettu aliavaruus (HT 4/3) ja Hahn-Banach.]

9:11 Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Näytä Hahn-Banachin lauseen avulla, että on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $\phi \in L^\infty(0, 1)^*$, että $\phi(p) = p'(0)$ (derivaatta origossa) kaikilla $p \in \mathcal{P}_n$, missä

$$\mathcal{P}_n = \{p : p \text{ reaalikertoiminen polynomi, aste } \deg(p) \leq n\}.$$

[Muista: $C(0, 1) \subset L^\infty(0, 1)$ on suljettu aliavaruus (HT 4:2).]

9:12 Onko olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $\phi \in C(0, 1)^*$, että $\phi(p) = p'(0)$ kaikilla $p \in \mathcal{P}$, kun

$$\mathcal{P} = \{p : p \text{ reaalikertoiminen polynomi}\}?$$

[Vihje: Tutki, olisiko sellainen funktionaali ϕ jatkuva sup-normin suhteen.]

9:13 Olkoon duaali E^* separoituva Banach avaruus. Osoita, että E on separoituva. Päteekö käänteinen tulos? [Idea: olkoon (x_n^*) tiheä jono avaruudessa E^* ja valitse alkio $x_n \in E$, joille $\|x_n\| = 1$ ja $x_n^*(x_n) \geq (1/2)\|x_n^*\|$ kaikilla n .

Osoita sopivan Hahn-Banachin version avulla, että suljettu lineaarinen verho $[x_n : n \in \mathbf{N}] = E$.]

9:14 Olkoon E Banachin avaruus, $M \subset E$ suljettu aliavaruus ja $S : M \rightarrow \ell^\infty$ jatkuva lineaarikuvaus. Osoita, että on olemassa jatkuva lineaarikuvaus $T : E \rightarrow \ell^\infty$ siten, että $Tx = Sx$ aina kun $x \in M$ ja $\|T\| = \|S\|$. [Apu: etsi Hahn-Banachin avulla laajennus koordinaattikuvauksiin $E \rightarrow \mathbf{K}$, $x \mapsto f_k(Sx)$, missä $f_k(z) = z_k$ kun $z = (z_j) \in \ell^\infty$ ja $k \in \mathbf{N}$.]

9:15 Olkoon E Banach avaruus, $A \subset E$ epätyhjä osajoukko sekä $f : A \rightarrow \mathbf{K}$ annettu funktio. Osoita, että funktiolla f on jatkuva lineaarinen laajennus $g : E \rightarrow \mathbf{K}$ jos ja vain jos on olemassa vakio $C < \infty$ jolle

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) \right| \leq C \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|$$

kaikilla vektoreilla $x_1, \dots, x_k \in A$, skalaareilla $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{K}$ ja $k \in \mathbf{N}$. [Hahn-Banachista taas apua.]

9:16 Olkoon E Banachin avaruus, ja $A \subset E$ sellainen osajoukko, että

$$\sup\{|x^*(x)| : x \in A\} < \infty$$

jokaisella funktionaalilla $x^* \in E^*$. Osoita, että A on rajoitettu joukko. [Vihje: Banach-Steinhausin lause sovellettuna biduaalissa E^{**} .]

9:17 Olkoon $1 < p < \infty$ ja $S : \ell^p \rightarrow \ell^p$ vasen siirto-operaattori $S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Etsi adjungaatti S^* .

9:18 Olkoon E Banach avaruus ja $J_E : E \rightarrow E^{**}$ luonnollinen inklusio. Osoita, että $(J_E)^* \circ J_{E^*} = I_{E^*}$ (avaruuden E^* identtinen kuvaus). Päättele, että E^* on refleksiivinen avaruus aina kun E on refleksiivinen.

9:19 Osoita, että jokainen Hilbertin avaruus on refleksiivinen. [Vihjeet. Olkoon $\sigma : E \rightarrow E^*$ Frechet-Rieszin lauseen antama liittolineaarinen isometria. Tarkista, että $(\sigma(x)|\sigma(y)) = (y|x)$, kun $x, y \in E$, on sisätulo avaruudessa E^* , joka antaa duaaliavaruuden normin. Olkoon $\tau : E^* \rightarrow E^{**}$ vastaava Frechet-Riesz esitys. Tarkista lopuksi, että $J_E = \tau \circ \sigma$, missä J_E on kanoninen kuvaus $E \rightarrow E^{**}$.]