VARFÖR ÄR π IRRATIONELLT?

Vi vill visa att talet π är irrationellt. Det vill säga, att det inte är möjligt att presentera π som en tal $\frac{r}{s}$ där r och s är heltal. För att visa satsen antar vi att påståendet är fel: $\pi = \frac{r}{s}$, där r och s är positiva hela tal. Skriv

$$f(x) = x^n(r - sx)^n.$$

(1) Visa att

$$0 < \int_0^{r/s} x^n(r - sx)^n \sin x dx \leq \frac{r}{s}\left(\frac{r^2}{4s}\right)^n < r^{2n+1}.$$

(Tips: När är $x^n(r - sx)^n$ maximalt? När är $\sin x$ maximalt? Uppskatta integralen genom att använda maximalen och längden av integrationsstigen.)

(2) Bevisa att

$$\int f(x) \sin x dx = -f(x) \cos x + f'(x) \sin x + f''(x) \cos x - f'''(x) \sin x - \ldots$$

(3) Använd övning 2 och visa att de udda derivatorna försvinner, och visa att

$$\int_0^{r/s} f(x) \sin x dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(f^{(2k)}\left(\frac{r}{s}\right) + f^{(2k)}(0)\right) = \sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k f^{(2k)}(0)$$

(4) Visa att $f^{(j)}(0) = 0$, när $j < n$. (Tips: Hurdan är polynomen $x^n(r - sx)^n$?

(5) Visa att $n! \mid f^{(j)}(0)$, när $j \geq n$, och visa sedan att

$$n! \mid \sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k f^{(2k)}(0) = \int_0^{r/s} x^n(r - sx)^n \sin x dx.$$

(6) Visa att $r^{2n+1} < n!$, när n är stor. (Tips: Logaritmer kan hjälpa. Summan kan uppskattas med integraler. Stirlings formel kan också användas.) Visa att antagningen var fel, och att satsen är rätt.