ELEMENTÄR TALTEORI

3. RÄKNEÖVNINGARNA

(1) Beräkna 5^{-1} modulo 9, dvs, lös x: $5x \equiv 1 \pmod 9$.

(2) Lös kongruensekvationen

$$5x + 3 \equiv 4 \pmod 7.$$

(3) Visa, att $17 \mid 11^{1600} - 1$.

(4) Lös system av kongruensekvationerna

$$\begin{cases} x \equiv 3 \ (\mathrm{mod} 9) \\ x \equiv 7 \pmod 8. \end{cases}$$

(5) I kompendium finns följande påståendet gällande Eulers φ-funktion: Låt$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ (primtalsfaktorisering), vi har

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_j - 1}(p_j - 1).$$

Visa påståendet. (Tipps: Betrakta först talen p^k, där p är ett primtal, och använd sen induktion för antalet olika primfaktorer.)

(6) Beviset av kinesisk restklassatsen: I kompendium har vi visat att lösningen är unik modulo $Mm_1 m_2 \cdots m_k$. Visa nu att talet

$$x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \cdots a_k M_k y_k \pmod M$$

uppfyller ekvationer

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \cdots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

(Komm ihåg att $\mathrm{sgd}(m_j, m_i) = 1$ när $j \neq i$, $M_j = \frac{M}{m_j}$ och $M_j y_j \equiv 1 \pmod{m_j}$.)