Elementär talteori, våren 2013
Förslag till lösningar för övning 2

Ifall du har några frågor gällande lösningsförslagen, fråga gärna på räkneövningstillfällen eller under handledningarna.

1. Visa, att $\sigma\big(p^k\big) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$, då p är ett primtal och k är ett positivt heltal.

Lösning. Talet p^k har delarna $1, p, p^2, \ldots, p^k$. (För att visa detta kan vi använda t.ex. Lemma 17: Om d är en delare för talet p^k, och q är en primtalsfaktor i d, så gäller $q \mid p^k$. Enligt Lemma 17 gäller då $q \mid p$, alltså måste $q = p$, dvs. d är en potens av talet p.)

Nu kan vi beräkna summan av delarna t.ex. på följande sätt:

$$\begin{aligned}(p-1)\,\sigma\big(p^k\big) &= (p-1)\,\big(p^k + p^{k-1} + \ldots + p^2 + p + 1\big) \\ &= p^{k+1} + p^k + p^{k-1} + \ldots + p^2 + p \\ &\qquad - p^k - p^{k-1} - \ldots - p^2 - p - 1 = p^{k+1} - 1.\end{aligned}$$

2. Låt oss nu generalisera detta resultat för flera primtal. Motivera först varför

$$\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \sum_{\substack{0 \leqslant j_1 \leqslant \alpha_1 \\ 0 \leqslant j_2 \leqslant \alpha_2 \\ \cdots \\ 0 \leqslant j_k \leqslant \alpha_k}} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_k^{j_k}.$$

Ändra sedan på summeringsordningen så att du får summan som motsvarar varje primtal skilt för sig, och använd efter detta uppgift 1 eller summaformeln för en geometrisk följd.

Lösning. Det är klart att varje tal i summan delar talet $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, eftersom kvoten

$$\frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}}{p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_k^{j_k}} = p_1^{\alpha_1 - j_1} p_2^{\alpha_2 - j_2} \cdots p_k^{\alpha_k - j_k}$$

är ett heltal. Å andra sidan, eftersom primtalsfaktoriseringen är unik, kan det inte finnas några andra delare.

Till näst tar vi ut ur summan de delare som beror endast på p_k och α_k, sedan de delare som beror endast på p_{k-1} och α_{k-1} osv.:

$$\begin{aligned}\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) &= \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \sum_{j_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{j_{k-2}=0}^{\alpha_{k-2}} \sum_{j_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} \sum_{j_k=0}^{\alpha_k} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_k^{j_k} \\ &= \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \sum_{j_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{j_{k-2}=0}^{\alpha_{k-2}} \sum_{j_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_{k-1}^{j_{k-1}} \sum_{j_k=0}^{\alpha_k} p_k^{j_k} \\ &= \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \sum_{j_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{j_{k-2}=0}^{\alpha_{k-2}} \sum_{j_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_{k-1}^{j_{k-1}} \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \\ &= \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \sum_{j_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{j_{k-2}=0}^{\alpha_{k-2}} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_{k-2}^{j_{k-2}} \sum_{j_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_{k-1}^{j_{k-1}} \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \\ &= \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \sum_{j_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{j_{k-2}=0}^{\alpha_{k-2}} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_{k-2}^{j_{k-2}} \cdot \frac{p_{k-1}^{\alpha_{k-1}+1} - 1}{p_k - 1} \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_{k-1}^{\alpha_{k-1}+1} - 1}{p_{k-1} - 1} \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.\end{aligned}$$

Ifall denna härledning känns oklar, försök först manipulera summan i fallet med endast två primtal p_1 och p_2. Då är det högst troligt lättare att se värför påståendet gäller. Sen kan du generalisera resultatet för k stycken primtal.

3. Lös den Diofantiska ekvationen $5x + 3y = 2$.

Lösning. OBS! Idén med Diofantiska ekvationer är att hitta heltalslösningar för någon ekvation. Vi godkänner alltså endast heltalslösningar.

Vi hittar lätt en lösning för ekvationen, nämligen $x = 1$, $y = -1$ (eftersom $5 - 3 = 2$). Eftersom både 5 och 3 är primtal, gäller sgd(5,3) $=$ 1. Enligt Sats 15 får vi då den allmänna lösningen enligt följande:

$$x = 1 + \frac{3k}{\mathrm{sgd}(5,3)} = 1 + 3k, \qquad y = -1 - \frac{5k}{\mathrm{sgd}(5,3)} = -1 - 5k,$$

var k är ett godtyckligt heltal.

4. Bestäm $\mathrm{sgd}(72, 56)$ och lös Diofantiska ekvationen $72x - 56y = 8$.

Lösning. Vi använder Euklides algoritm:

$$72 = 1 \cdot 56 + 16, \qquad 56 = 3 \cdot 16 + 8, \qquad 16 = 2 \cdot 8.$$

Den största gemensamma delaren är den sista resten olika noll, dvs 8.

En lösning till Diofantiska ekvationen fås genom att använda Euklides algoritm ”baklänges”:

$$8 = 56 - 3 \cdot 16 = 56 - 3 \cdot (72 - 1 \cdot 56) = 4 \cdot 56 - 3 \cdot 72.$$

Då får vi den allmänna lösningen med hjälp av Sats 15:

$$x = -3 + \frac{56k}{8} = -3 + 7t, \qquad y = -4 + \frac{72k}{8} = -4 + 9t,$$

var k är ett godtyckligt heltal.

5. Lös Diofantiska ekvationen $72x - 56y = 7$.

Lösning. Eftersom sgd(72,56) $=$ 8, och 8 inte delar 7, har ekvationen inga lösningar enligt Sats 11.

6. R.G. dricker mycket kaffe. Han uppskattar att minst 24 paket kaffe behövs. Typ A av kaffe kostar 3 euro och typ B kostar 5 euro per paket. R.G. vill använda exakt 100 euro, och eftersom typ B är en av hans favoriter, vill han köpa minst lika många paket av B som av A. Hur många paket av varje kaffesort kommer han att ta hem från butiken?

Lösning. Vi betecknar med x antalet av den dyrare kaffesorten B och med y antalet av den billigare kaffesorten som R.G. köper. Då är x och y icke-negativa heltal, och det gäller $x + y \geqslant 24$, $x \geqslant y$ och $5x + 3y = 100$.

Eftersom $2 = 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 3$, gäller alltså att $100 = 2 \cdot 50 = 50 \cdot 5 - 50 \cdot 3$.

Då är alltså $x = 50$ och $y = -50$ en lösning för den Diofantiska ekvationen $5x + 3y = 100$.

Enligt Sats 15 är alla lösningar för ekvationen

$$x = 50 + 3k, \qquad y = -50 - 5k,$$

var k är ett godtyckligt heltal.

Eftersom $x + y \geqslant 24$, måste

$$\begin{aligned} 50 + 3k - 50 - 5k &\geqslant 24 \\ -2k &\geqslant 24 \\ k &\leqslant -12. \end{aligned}$$

Å andra sidan, eftersom $x \geqslant y$, måste

$$\begin{aligned} 50 + 3k &\geqslant -50 - 5k \\ 8k &\geqslant -100 \\ k &\geqslant -12\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Då gäller $-12\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant -12$, alltså eftersom k är ett heltal måste $k = -12$. Lösningen vi söker efter är alltså

$$x = 50 + 3 \cdot (-12) = 14, \qquad y = -50 - 5 \cdot (-12) = 10.$$