Elementär talteori, våren 2013
Förslag till lösningar för övning 1

Dessa lösningar är endast förslag. Man kan naturligtvis lösa uppgifterna på många olika sätt. Dessa förslag är inte nödvändigtvis de lättaste eller elegantaste sätten att lösa uppgifterna.

1. Använd Eratosthenes såll för att hitta alla primtal i intervallet [1,123].

Lösning. Eftersom varje sammansatta naturliga tal n har en primfaktor p för vilken $p \leqslant \sqrt{n}$, räcker det att stryka bort multiplar av de primtal p, för vilka $p \leqslant \sqrt{123} < \sqrt{144} = 12$, dvs. $p \leqslant 11$.

Vi börjar med att stryka bort alla jämna tal:

	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	9	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$
15	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$	21	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	25	$\cancel{26}$	27	$\cancel{28}$
29	$\cancel{30}$	31	$\cancel{32}$	33	$\cancel{34}$	35	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	39	$\cancel{40}$	41	$\cancel{42}$
43	$\cancel{44}$	45	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	49	$\cancel{50}$	51	$\cancel{52}$	53	$\cancel{54}$	55	$\cancel{56}$
57	$\cancel{58}$	59	$\cancel{60}$	61	$\cancel{62}$	63	$\cancel{64}$	65	$\cancel{66}$	67	$\cancel{68}$	69	$\cancel{70}$
71	$\cancel{72}$	73	$\cancel{74}$	75	$\cancel{76}$	77	$\cancel{78}$	79	$\cancel{80}$	81	$\cancel{82}$	83	$\cancel{84}$
85	$\cancel{86}$	87	$\cancel{88}$	89	$\cancel{90}$	91	$\cancel{92}$	93	$\cancel{94}$	95	$\cancel{96}$	97	$\cancel{98}$
99	$\cancel{100}$	101	$\cancel{102}$	103	$\cancel{104}$	105	$\cancel{106}$	107	$\cancel{108}$	109	$\cancel{110}$	111	$\cancel{112}$
113	$\cancel{114}$	115	$\cancel{116}$	117	$\cancel{118}$	119	$\cancel{120}$	121	$\cancel{122}$	123			

Till näst stryker vi över tal delbara med tre:

	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$
$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$	$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	25	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$
29	$\cancel{30}$	31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	35	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$	41	$\cancel{42}$
43	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	49	$\cancel{50}$	$\cancel{51}$	$\cancel{52}$	53	$\cancel{54}$	55	$\cancel{56}$
$\cancel{57}$	$\cancel{58}$	59	$\cancel{60}$	61	$\cancel{62}$	$\cancel{63}$	$\cancel{64}$	65	$\cancel{66}$	67	$\cancel{68}$	$\cancel{69}$	$\cancel{70}$
71	$\cancel{72}$	73	$\cancel{74}$	$\cancel{75}$	$\cancel{76}$	77	$\cancel{78}$	79	$\cancel{80}$	$\cancel{81}$	$\cancel{82}$	83	$\cancel{84}$
85	$\cancel{86}$	$\cancel{87}$	$\cancel{88}$	89	$\cancel{90}$	91	$\cancel{92}$	$\cancel{93}$	$\cancel{94}$	95	$\cancel{96}$	97	$\cancel{98}$
$\cancel{99}$	$\cancel{100}$	101	$\cancel{102}$	103	$\cancel{104}$	$\cancel{105}$	$\cancel{106}$	107	$\cancel{108}$	109	$\cancel{110}$	$\cancel{111}$	$\cancel{112}$
113	$\cancel{114}$	115	$\cancel{116}$	$\cancel{117}$	$\cancel{118}$	119	$\cancel{120}$	121	$\cancel{122}$	$\cancel{123}$			

Nu tal delbara med fem:

	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$
$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$	$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$
29	$\cancel{30}$	31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$	41	$\cancel{42}$
43	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	49	$\cancel{50}$	$\cancel{51}$	$\cancel{52}$	53	$\cancel{54}$	$\cancel{55}$	$\cancel{56}$
$\cancel{57}$	$\cancel{58}$	59	$\cancel{60}$	61	$\cancel{62}$	$\cancel{63}$	$\cancel{64}$	$\cancel{65}$	$\cancel{66}$	67	$\cancel{68}$	$\cancel{69}$	$\cancel{70}$
71	$\cancel{72}$	73	$\cancel{74}$	$\cancel{75}$	$\cancel{76}$	77	$\cancel{78}$	79	$\cancel{80}$	$\cancel{81}$	$\cancel{82}$	83	$\cancel{84}$
$\cancel{85}$	$\cancel{86}$	$\cancel{87}$	$\cancel{88}$	89	$\cancel{90}$	91	$\cancel{92}$	$\cancel{93}$	$\cancel{94}$	$\cancel{95}$	$\cancel{96}$	97	$\cancel{98}$
$\cancel{99}$	$\cancel{100}$	101	$\cancel{102}$	103	$\cancel{104}$	$\cancel{105}$	$\cancel{106}$	107	$\cancel{108}$	109	$\cancel{110}$	$\cancel{111}$	$\cancel{112}$
113	$\cancel{114}$	$\cancel{115}$	$\cancel{116}$	$\cancel{117}$	$\cancel{118}$	119	$\cancel{120}$	121	$\cancel{122}$	$\cancel{123}$			

Och till näst tal delbara med sju:

	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$
$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$	$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$
29	$\cancel{30}$	31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$	41	$\cancel{42}$
43	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	$\cancel{49}$	$\cancel{50}$	$\cancel{51}$	$\cancel{52}$	53	$\cancel{54}$	$\cancel{55}$	$\cancel{56}$
$\cancel{57}$	$\cancel{58}$	59	$\cancel{60}$	61	$\cancel{62}$	$\cancel{63}$	$\cancel{64}$	$\cancel{65}$	$\cancel{66}$	67	$\cancel{68}$	$\cancel{69}$	$\cancel{70}$
71	$\cancel{72}$	73	$\cancel{74}$	$\cancel{75}$	$\cancel{76}$	$\cancel{77}$	$\cancel{78}$	79	$\cancel{80}$	$\cancel{81}$	$\cancel{82}$	83	$\cancel{84}$
$\cancel{85}$	$\cancel{86}$	$\cancel{87}$	$\cancel{88}$	89	$\cancel{90}$	$\cancel{91}$	$\cancel{92}$	$\cancel{93}$	$\cancel{94}$	$\cancel{95}$	$\cancel{96}$	97	$\cancel{98}$
$\cancel{99}$	$\cancel{100}$	101	$\cancel{102}$	103	$\cancel{104}$	$\cancel{105}$	$\cancel{106}$	107	$\cancel{108}$	109	$\cancel{110}$	$\cancel{111}$	$\cancel{112}$
113	$\cancel{114}$	$\cancel{115}$	$\cancel{116}$	$\cancel{117}$	$\cancel{118}$	$\cancel{119}$	$\cancel{120}$	121	$\cancel{122}$	$\cancel{123}$			

Nu är nästa primtal 11, och det är alltså det sista primtalet vars multipler vi måste stryka över:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~
29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~
43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~
~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~
~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~	~~111~~	~~112~~
113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~	~~121~~	~~122~~	~~123~~			

Listan på primtalen är alltså:

	2	3		5		7				11		13	
		17		19				23					
29		31						37				41	
43				47						53			
		59		61						67			
71		73						79				83	
				89								97	
		101		103				107		109			
113													

2. Beräkna antalet och summan av positiva delare till talet 30 med delarefunktionen och manuellt.

Lösning. Största talet som delar talet 30 är naturligtvis talet 30 själv. Den näst största faktorn är högst $\frac{30}{2} = 15$, alltså kontrollerar vi vilka tal mindre än eller lika med 15 som delar 30:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{30 = 30 \cdot 1}, & \mathbf{30 = 5 \cdot 6}, & 30 = 2 \cdot 11 + 8, \\
\mathbf{30 = 15 \cdot 2}, & 30 = 4 \cdot 7 + 2, & 30 = 2 \cdot 12 + 6, \\
\mathbf{30 = 10 \cdot 3}, & 30 = 3 \cdot 8 + 6, & 30 = 2 \cdot 13 + 4, \\
30 = 7 \cdot 4 + 2, & 30 = 3 \cdot 9 + 3, & 30 = 2 \cdot 14 + 2, \\
\mathbf{30 = 6 \cdot 5}, & \mathbf{30 = 3 \cdot 10}, & \mathbf{30 = 2 \cdot 15}.
\end{array}$$

Alltså är delarna 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 och 30, dvs. har vi åtta stycken av dem. Summan av delarna är

$$1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30 = 11 + 16 + 45 = 27 + 45 = 72.$$

Primtalsfaktoriseringen för talet 30 är $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, alltså är antalet delare

$$(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8,$$

och summan av delarna är

$$\frac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = (1 + 2) \cdot (1 + 3) \cdot (1 + 5) = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 3 \cdot 24 = 72.$$

3. Låt k vara udda. Visa att $k^2 - 1$ är delbart med åtta.

Lösning. Eftesom k är udda, hittar vi ett heltal n för vilket $k = 2n + 1$. Därmed får vi

$$k^2 - 1 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n^2 + 4n = 4(n^2 + n).$$

Ifall n är udda, är även n^2 udda (tänk på primtalsfaktoriseringen), och därmed är summan n^2+n ett jämnt tal. Ifall n är jämnt, är även n^2 jämnt, och igen är summan n^2+n ett jämnt tal. Alltså kan vi skriva $n^2+n=2m$ för något m, och vi får

$$k^2-1=4(n^2+n)=4\cdot 2m=8m.$$

Därmed är k^2-1 delbart med åtta.

4. Antag att k inte är delbart med tre. Visa, att k^2-1 är delbart med tre. När är k^2-1 delbart med nio?

Lösning. Eftersom k inte är delbart med tre, kan vi skriva k i formen $k=3n+1$ eller $k=3n-1$ för något n. Vi undersöker båda fallen:

Fall 1: $k=3n+1$. Nu gäller

$$k^2-1=(3n+1)^2-1=9n^2+6n+1-1=3(3n^2+2n),$$

alltså är k^2-1 delbart med tre.

Fall 2: $k=3n-1$. Nu gäller

$$k^2-1=(3n-1)^2-1=9n^2-6n+1-1=3(3n^2-2n),$$

alltså är k^2-1 igen delbart med tre.

Ifall $9|k^2-1$, måste (i Fall 1) $9|(3(3n^2+2n))$, dvs. $3|(3n^2+2n)$, alltså måste $3|2n$. Därmed måste $3|n$, alltså är $n=3m$ för något m. Alltså är

$$k=3n+1=3(3m)+1=9m+1,$$

dvs. k har resten 1 (mod 9). I fall 2 får vi på samma sätt att

$$k=3n-1=3(3m)-1=9m-1,$$

alltså har k resten -1 (mod 9).

Nu måste vi endast kontrollera att ifall $k=9m+1$ (eller $9m-1$), så delar nio talet k^2-1. Detta går enkelt:

$$k^2-1=(9m+1)^2-1=81m^2+18m+1-1=81m^2+18m=9(9m^2+2m).$$

Alltså ifall $9|k^2-1$ har talet k samma rest modulo 9 som det har modulo 3.

5. Visa, att om talet 2^p-1 är ett primtal, så är $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ ett perfekt tal.

Lösning. Eftersom både 2 och 2^p-1 är primtal, får vi direkt primtalsfaktoriseringen för talet $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$. Vi kan nu använda oss av formeln för summan av delare som finns i föreläsningsanteckningarna:

$$\begin{aligned}\sigma\big(2^{p-1}\left(2^p-1\right)\big) &= \frac{\left(2^p-1\right)^2-1}{2^p-1-1}\cdot\frac{2^{p-1+1}-1}{2-1}=\frac{2^{2p}-2\cdot 2^p+1-1}{2^p-2}\cdot\left(2^p-1\right)\\ &=\frac{2^p\left(2^p-2\right)}{2^p-2}\cdot\left(2^p-1\right)=2^p\left(2^p-1\right)=2\cdot 2^{p-1}\left(2^p-1\right).\end{aligned}$$

Alltså är summan av talets positiva delare två gånger talet självt, dvs. talet är perfekt.

6. Calle säger till Hobbe att det finns 16 delare till talet n^2. Varför vet Hobbe att Calle har fel?

Lösning. Eftersom talet 1 har endast delarna 1 och -1, vet vi att $n > 1$. Vi kan då skriva primtalsfaktoriseringen för talet n på följande sätt: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, var k är ett positivt heltal, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ är positiva heltal och $p_1, p_2, \ldots, p_k$ är olika primtal. Därmed har n^2 primtalsfaktoriseringen $p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \cdots p_k^{2a_k}$.

Vi vet nu enligt formeln på föreläsningarna att summan av positiva delarna för n^2 är

$$k = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \cdots (2a_k + 1) .$$

I detta uttryck är varje faktor udda, alltså är talet självt udda. För varje positiv delare d har vi en negativ delare -d, alltså har n^2 totalt $2k$ stycken delare. Vi vet att $4|16$, men eftersom k är udda delar talet 4 inte talet $2k$, alltså kan n^2 inte ha 16 delare.