BERTRANDS POSTULAT

Bertrands postulat säger att det alltid finns minst ett primtal p mellan n och $2n$, $n \geq 2$.

(1) Visa att om primtalet p ligger på $]k, 2k]$, sedan har vi $p \mid \binom{2k}{k}$.

(2) Visa att $\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{2n+1}$ och $\binom{2m+1}{m+1} < 2^{2m}$

(3) Visa att

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primtal}}} p < 4^{n-1}.$$

Tips: Induktion hjälper. $m \to m+1$ är lätt om $m+1$ inte är ett primtal. Om $m+1$ är ett primtal, använd induktionantagningen för $\frac{m+1}{2}$ och övningar 1 och 2.

(4) Visa att $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$ tai 1.

(5) Visa att primtalet p delar talet $\binom{2n}{n}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

gånger, och upskatta att summan $\leq\leq \log_p 2n$. Visa att om $\frac{2}{3}n < p \leq\leq n$, sedan delar primtalet p inte talet $\binom{2n}{n}$, och om $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n$, sedan delar primtalet p talet $\binom{2n}{n}$ högst en gång.

(6) Bevisa postulaten: Anta att det inte finns primtal på $]n, 2n]$. I övning 2 har Du uppskattat talet $\binom{2n}{n}$. Uppskatta nu igen genom att skriva talet $\binom{2n}{n}$ med hjälp av sin primtalsfaktorisering, och använda övningar 3-5. Jämförä. Betrakta små n om behövs.