Analyysi II, 1. kurssikoe to 28.2.2013
Ratkaisut ja arvostelukommentit (4 s.): Jouni Luukkainen (arvostelu valmistui 19.3.2013)
Tämä tiedote on ilmoitustaululla ja kurssin kotisivulla.
Arvostelija selittää pyydettäessä korvaavan 1. kurssikokeen to 14.3.2013 (12 osallistunutta) ratkaisut.

Teht. 1. *Laske integraali* $\int_0^{\pi/2} x \sin 4x \, dx$.
Ratk. Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x \sin 4x \, dx &= \Big/_{0}^{\pi/2} x\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) dx \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\cos 2\pi - 0\cos 0\right) + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \cos 4x \, dx \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1 - 0 \cdot 1\right) + \frac{1}{4} \Big/_{0}^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin 4x \\ &= -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}(\sin 2\pi - \sin 0) = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}(0-0) = -\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

Arvostelusta. Sijoitus $t = 4x$ ei helpottaisi, sillä saataisiin $\int_0^{\pi/2} x \sin 4x \, dx = \dfrac{1}{16}\int_0^{2\pi} t \sin t \, dt$, jolloin tarvittaisiin samanlainen osittaisintegrointi. Hämmästyttävän monella oli tulon $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ arvona $\frac{1}{8}$. Osittaisintegrointi integroimalla ensin tekijä x muotoon $\dfrac{1}{2}x^2$ ja sitten derivoimalla tekijä $\sin 4x$ muotoon $4\cos 4x$ ei tuottaisi tulosta, sillä oleellista oli päästä polynomitekijästä eroon derivoimalla; kuitenkin seuraavasta virheettömästä esityksestä sai 1 p:

$$\int_0^{\pi/2} x \sin 4x \, dx = \Big/_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}x^2 \sin 4x - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}x^2 \cdot 4\cos 4x \, dx.$$

Teht. 2. *Olkoon* $c > 0$ *ja* $f\colon [-c, c] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - 1$.
(a) *Määritä luku* $c > 0$ *siten, että funktion* f *keskiarvo* $\overline{f}$ *välillä* $[-c, c]$ *on* 1.
Muistutus: *integroituvan funktion* $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ keskiarvo *välillä* $[a, b]$ *on*

$$\overline{g} = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\, dx.$$

(b) *Määritä ne pisteet* ξ, *jotka kelpaavat integraalilaskennan väliarvolauseessa esiintyväksi pisteeksi* $\xi \in]-c, c[$ *integraalille*

$$\int_{-c}^{c} f(x)\, dx,$$

missä c *on kohdassa (a) määrittämäsi luku.*
Ratk. (a) Funktio f on parillinen, sillä $f(-x) = |-x| - 1 = |x| - 1 = f(x)$ kaikilla $x \in [-c, c]$, ja $f(x) = x - 1$ kaikilla $x \in [0, c]$, joten

$$\int_{-c}^{c} f(x)\, dx = 2\int_0^c f(x)\, dx = \int_0^c 2(x-1)\, dx = \Big/_{0}^{c} (x-1)^2 = (c-1)^2 - (0-1)^2 = (c^2 - 2c + 1) - 1 = c^2 - 2c.$$

Täten vaatimuksena luvulle c on

$$1 = \overline{f} = \frac{c^2 - 2c}{c - (-c)} = \frac{c(c-2)}{2c} = \frac{c-2}{2} \Leftrightarrow c - 2 = 2 \Leftrightarrow \underline{c = 4}.$$

(b) Funktio f on jatkuva, joten integraalilaskennan väliarvolauseen mukaan on olemassa pisteitä $\xi \in]-c, c[$, joilla $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = f(\xi)(c-(-c))$ eli joilla $\overline{f} = f(\xi)$. Nyt $\overline{f} = 1$ ja $c = 4$, joten vaatimuksena pisteelle $\xi \in]-4, 4[$ on

$$f(\xi) = 1 \Leftrightarrow |\xi| - 1 = 1 \Leftrightarrow |\xi| = 2 \Leftrightarrow \underline{\xi = \pm 2}.$$

Arvostelusta. Sekä a)-kohta että b)-kohta olivat 3 p arvoisia. Oleellista a)-kohdassa oli itseisarvomerkkien oikein poistaminen; jos ei käyttänyt f:n parillisuutta, oli laskettava seuraavasti:

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \int_{-c}^{0} (-x-1)\,dx + \int_{0}^{c} (x-1)\,dx = \Big/_{\!-c}^{\,0} \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) + \Big/_{\!0}^{\,c} \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right),$$

jolloin ensimmäisessä sijoituksessa oli oltava tarkkana sijoitettaessa $x = -c$ termiin $-x$, sillä koska kyseessä oli alaraja, tuli kolmaskin miinusmerkki ja siis yhdistettynä termi $-c$. Sen sijaan väitteet

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \int_{-c}^{c} (x-1)\,dx = \Big/_{\!-c}^{\,c} \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) \qquad \text{ja} \qquad \int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \int_{-c}^{c} (-x-1)\,dx = \Big/_{\!-c}^{\,c} \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

eivät antaneet a)-kohdasta pistettäkään. Vaikka a)-kohta olisi ollut väärinkin, niin b)-kohdasta saattoi silti saada täydet 3 p. Moni oli b)-kohdassa uudestaan laskenut integraalin $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$ huomaamatta, että c:n valinnan tähden sen arvo on a)-kohdan mukaan $2c$. Ei tarvinnut b)-kohdassa huomauttaa, että f on jatkuva, eikä, että saadut ξ:n arvot kuuluvat väliin $]-c, c[$ (näin ei välttämättä ollutkaan, jos a)-kohdassa oli saanut virheellisen c:n).

Teht. 3. *Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali* $\displaystyle\int_0^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Ratk. (majoranttiperiaatteen avulla). Integroitava on jatkuva välillä $]0, 4]$, mutta ei rajoitettu (sillä $\displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \infty$), joten kyseessä on alarajalla epäoleellinen integraali. Nyt

$$0 \le \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \le \frac{e^{-0}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{kaikilla } x \in]0, 4].$$

Tiedetään, että koska $1/2 < 1$, niin majoranttifunktion $x \mapsto 1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$ epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ yli (standardi)välin $]0, 1]$ suppenee. Tällöin suppenee myös epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. Täten majoranttiperiaatteen nojalla tutkittava epäoleellinen integraali <u>suppenee</u>.

Ratk. (integraalifunktion avulla). On olemassa raja-arvo

$$\int_c^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_c^4 D(-2e^{-\sqrt{x}})\,dx = \Big/_{\!c}^{\,4} -2e^{-\sqrt{x}} = 2(e^{-\sqrt{c}} - e^{-2}) \to 2(1 - e^{-2}), \qquad \text{kun } c \to 0+,$$

sillä $e^{-\sqrt{0}} = e^0 = 1$, joten tutkittava epäoleellinen integraali <u>suppenee</u> arvonaan $2(1 - e^{-2})$.

Ratk. (sijoituksen avulla). Tekemällä sijoitus $t = e^{-\sqrt{x}}$, jolloin $dt = -\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$, kun $0 < x \le 4$, saadaan, kun $c \in]0, 4[$, että

$$\int_c^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{e^{-\sqrt{c}}}^{e^{-\sqrt{4}}} (-2)\,dt = \int_{e^{-2}}^{e^{-\sqrt{c}}} 2\,dt = 2(e^{-\sqrt{c}} - e^{-2}) \to 2(e^{-0} - e^{-2}) = 2(1 - e^{-2}), \qquad \text{kun } c \to 0+.$$

Siis tutkittava epäoleellinen integraali suppenee arvonaan $2(1-e^{-2})$. Integraalin arvoa ei ole välttämätöntä laskea, sillä riittää huomata, että raja-arvo on varsinainen Riemannin integraali:

$$\int_c^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{e^{-2}}^{e^{-\sqrt{c}}} 2\,dt \to \int_{e^{-2}}^{1} 2\,dt, \qquad \text{kun } c \to 0+.$$

Voi myös tehdä sijoituksen $t=\sqrt{x}$, jolloin $x=t^2$ ja $dx = 2t\,dt$ ja siis

$$\int_c^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{4}} \frac{e^{-t}}{t}\cdot 2t\,dt = \int_{\sqrt{c}}^{2} 2e^{-t}\,dt \to \int_0^2 2e^{-t}\,dt, \qquad \text{kun } c \to 0+.$$

Osittaisintegroimalla. Osittaisintegroinnilla saadaan raja-arvona varsinainen integraali:

$$\int_c^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \Big/_{c}^{4} 2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - \int_c^4 2\sqrt{x}\left(-\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right)dx = 4e^{-2} - 2\sqrt{c}e^{-\sqrt{c}} + \int_c^4 e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

$$\to 4e^{-2} + \int_0^4 e^{-\sqrt{x}}\,dx, \qquad \text{kun } c \to 0+.$$

Arvostelusta. Majoranttiperiaatetta käytettäessä integroitavan $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}/\sqrt{x}$ epänegatiivisuuden toteamatta jättämisestä meni 1 p ja johtopäätöksen $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty \Rightarrow \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty$ ohittaminen vei samoin 1 p. Sai myös suoraan muistaa, että $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ suppenee; ei siis tarvinnut verrata eksponenttia $1/2$ kriittiseen eksponenttiin 1; samoin, jos halusi osoittaa integraalin $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ suppenemisen laskemalla sen arvon $(\Big/_0^4 2\sqrt{x} = 4)$, ei vaadittu raja-arvomuotoilua, vaan alarajan 0 sai suoraan kirjoittaa. Mutta käytettäessä sijoitusta $t=t(x)$ tutkittavaan integraaliin oli se tehtävä varsinaiseen Riemannin integraaliin $\int_c^4$ ja otettava sitten raja-arvo $c \to 0+$; muutoin, siis jos suoraan korvasi alarajan 0 alarajalla $t(0)$, meni 2 p. Samoin integraalifunktiota käytettäessä oli mentävä raja-arvon kautta; muutoin sakkoa 2 p.

Teht. 4. *Olkoon* $f\colon [-1,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x+4, & -1 \le x < 1, \\ 2, & x = 1, \\ 1, & 1 < x \le 3, \end{cases}$$

ja olkoon $D = \{-1,0,1,3\}$ *välin* $[-1,3]$ *jako.*

(a) *Määritä funktion f jakoon D liittyvän ylä- ja alasumman erotus $S_D - s_D$.*

(b) *Määritä jokin jono $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, johon liittyvälle Riemannin summalle $S_D(f,\xi)$ pätee*

$$S_D(f,\xi) = \int_{-1}^3 f(x)\,dx.$$

Ratk. (a) Funktio f on vähenevä, sillä f on vähenevä väleillä $[-1,1[$ ja $]1,3]$ sekä pätee

$$f(x) = -x+4 > -1+4 = 3 > 2 = f(1) \quad \text{ja} \quad f(1) = 2 > 1 = f(y), \qquad \text{kun } -1 \le x < 1 < y \le 3.$$

Täten

$$\begin{aligned} S_D &= \sup f[-1,0]\ell([-1,0]) + \sup f[0,1]\ell([0,1]) + \sup f[1,3]\ell([1,3]) \\ &= f(-1)\cdot 1 + f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 2 = 5\cdot 1 + 4\cdot 1 + 2\cdot 2 = 5+4+4 = 13 \qquad \text{ja} \\ s_D &= \inf f[-1,0])\ell([-1,0]) + \inf f[0,1])\ell([0,1]) + \inf f[1,3])\ell([1,3]) \\ &= f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 + f(3)\cdot 2 = 4\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 = 4+2+2 = 8. \end{aligned}$$

Siis $S_D - s_D = 13 - 8 = \underline{5}$.

(b) Jono $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ on tietysti poimittava jaosta D, eli on oltava $\xi_1 \in [-1, 0]$, $\xi_2 \in [0, 1]$ ja $\xi_3 \in [1, 3]$, jolloin

$$S_D(f,\xi) = f(\xi_1)\ell([-1,0]) + f(\xi_2)\ell([0,1]) + f(\xi_3)\ell([1,3]) = f(\xi_1)\cdot 1 + f(\xi_2)\cdot 1 + f(\xi_3)\cdot 2 = f(\xi_1) + f(\xi_2) + 2f(\xi_3).$$

Funktio f on integroituva, sillä f on vähenevä. Tämä seuraa myös siitä, että f on rajoitettu ja pistettä $x = 1$ lukuun ottamatta jatkuva. Koska funktiot $x \mapsto -x + 4$ välillä $[-1, 1]$ ja $x \mapsto 1$ välillä $[1, 3]$ ovat jatkuvia myös pisteessä $x = 1$, saadaan funktion $x \mapsto -x$ parittomuutta käyttäen, että

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-x+4)\,dx + \int_{1}^{3} 1\,dx = \int_{-1}^{1} (-x)\,dx + \int_{-1}^{1} 4\,dx + \int_{1}^{3} 1\,dx = 0 + 4\cdot 2 + 1 \cdot 2 = 10$$

Määritetään nyt kaikki ne jaon D poimintajonot ξ, joilla $S_D(f,\xi) = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ eli joilla

$$f(\xi_1) + f(\xi_2) + 2f(\xi_3) = 10. \tag{*}$$

Tapaus $\xi_3 > 1$: Nyt $f(\xi_3) = 1$, joten on oltava $f(\xi_1) + f(\xi_2) = 10 - 2 = 8$. Koska $f(\xi_1) \le 5$, on oltava $f(\xi_2) \ge 3$ ja siis $\xi_2 < 1$. Tällöin on oltava $8 = (-\xi_1 + 4) + (-\xi_2 + 4) \Leftrightarrow \xi_2 = -\xi_1$. Ehdot yhdistettyinä ovat $\underline{\xi_2 = -\xi_1 < 1 < \xi_3}$, ja voidaan esimerkiksi valita $\xi = \underline{(0, 0, 3)}$ tai jakovälien keskipisteiden jono $\xi = \underline{(-1/2, 1/2, 2)}$.

Tapaus $\xi_3 = 1$: Nyt $f(\xi_3) = 2$, joten on oltava $f(\xi_1) + f(\xi_2) = 10 - 4 = 6$. Koska $f(\xi_1) \ge 4$, on oltava $f(\xi_2) \le 2$ eli on oltava $f(\xi_2) = 2$ ja $\xi_2 = 1$. Tällöin on oltava $f(\xi_1) = 6 - 2 = 4$ eli $\xi_1 = 0$. Täten myös jono $\xi = \underline{(0, 1, 1)}$ on vaadittu.

Arvostelusta. Sekä a)-kohta että b)-kohta olivat 3 p arvoisia. Oleellinen vaikeus a)-kohdassa oli se, että $\inf f[0,1]$ oli 2 eikä 3 ja että $\sup f[1,3]$ oli 2 eikä 1. Jono ξ oli oikein ymmärretty poiminnaksi jaosta D, vaikka niin ei sanottukaan. Integraalin $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ oikeasta arvosta sai 1 p, ja arvon sai katsoa kuvastakin geometrisesti; oleellistahan b)-kohdassa oli Riemannin summan käsite. Väärä integraalin arvo johti ankaruuteen arvostelussa, koska jonon ξ löysi tällöin ehkä helpommin. Itse asiassa integraalia ei tarvinnut edes laskea, mutta tällöin piti huomauttaa, että f on integroituva. Molemmissa kohdissa piti huomata, että jako D ei ollut tasavälinen vaan että kolmannen jakovälin pituus oli 2 eikä 1 kuten kahden ensimmäisen jakovälin. Näin ollen b)-kohdassa vähintään 2 pisteeseen päästäkseen oli saatava ensin yhtälön (*) kertoimet oikein.