

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013
Harjoitus 9

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 5.4.2013 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 19.4.2013 klo 18.00

Tehtävällä 17 voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

Tehtäväsarja I

Mitkä tehtävien 1–2 yhtälöistä pätevät mielivaltaisen renkaan alkioille a ja b ?

1. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
2. $2a \cdot 3(-b) + ab = (-5)ab$
3. Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas. Osoita, että jos (R, \cdot) on ryhmä, niin renkaassa R on vain yksi alkio, nolla.

Tehtäväsarja II

Tutustu lukuun 13, jossa käsitellään kuntia.

4. Määritä kaikki renkaan $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ yksiköt. Onko kyseessä kunta?
- 5.* Harjoituksessa 8 osoitettiin, että

$$A = \left\{ \frac{a}{5^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

on renkaan \mathbb{Q} alirengas. Onko rengas A kunta?

Tehtäväsarja III

Tutustu kirjan lukuun 14, jossa käsitellään kokonaisalueita.

6. Onko rengas $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kokonaisalue?
7. Ratkaise kokonaisalueessa yhtälö $x^2 - 4 = 0$.
8. Jatkoa edelliseen tehtävään. Mitkä ovat yhtälön ratkaisut renkaassa \mathbb{Z}_4 ? Miten selität sen, että näissä kahdessa tehtävässä saamasi ratkaisut eivät ole samoja?

Tehtäväsarja IV

Tutustu lukuihin 15.1 ja 15.2, joissa käsitellään normaaleja aliryhmiä ja sivuluokkien laskutoimituksia.

- Ryhmän S_3 aliryhmän $H = \{(1), (13)\}$ vasemmat sivuluokat määritettiin harjoituksen 7 tehtävässä 7. Määritä aliryhmän oikeat sivuluokat. Onko aliryhmä normaali?
- Ryhmällä \mathbb{Z}_{16} on aliryhmä $H = \langle [4]_{16} \rangle$. Osoita, että H on normaali aliryhmä.
- Jatkoa edelliseen tehtävään. Koska H on normaali aliryhmä, joukossa \mathbb{Z}_{16}/H voidaan määritellä laskutoimitus ehdolla

$$([a]_{16} + H) + ([b]_{16} + H) = [a]_{16} + [b]_{16} + H.$$

Mikä joukon

$$\mathbb{Z}_{16}/H = \{H, [1]_{16} + H, [2]_{16} + H, [3]_{16} + H\}$$

alkioista on $([2]_{16} + H) + ([1]_{16} + H)$? Entä $([2]_{16} + H) + ([2]_{16} + H)$?

Tehtäväsarja V

Tutkitaan polynomirenkaan $\mathbb{Z}_3[X]$ alkioita

$$P = X^3 + 2X^2 + 1, \quad Q = 2X^2 + X + 1, \quad R = X - 1 \quad \text{ja} \quad S = 4X^3 + 2X^2 - 2$$

- Mitkä edellä listatuista polynomeista ovat samoja?
- * Määritä polynomeja P , Q ja R vastaavat polynomikuvaukset. Mitkä kuvauksista ovat samoja?

Tehtäväsarja VI

- Ryhmällä $4\mathbb{Z}$ aliryhmä $20\mathbb{Z}$. Määritä sivuluokkien joukko $4\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. Muista perustella vastauksesi.
- * Jatkoa edelliseen tehtävään. Mikä on aliryhmän $20\mathbb{Z}$ indeksi $[4\mathbb{Z} : 20\mathbb{Z}]$?
- Määritä kaikki ryhmän $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ aliryhmät.

Ylimääräinen tehtävä

- Osoita, että renkaassa yhteenlaskun vaihdannaisuus seuraa renkaan määritelmän muista ehdoista. Kyseinen ehto on siis periaatteessa turha. (Jos käytät apunasi renkaan laskusääntöjä, varmista, että niiden todistamisessa ei käytetty yhteenlaskun vaihdannaisuutta.)